LEHRBRIEFE FÜR DAS FERNSTUDIUM
HERAUSGEGEBEN
VON DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DRESDEN

ELEKTROPHYSIK

(THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK)

10. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck

II. AUSGABE

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

9083II/10

ELEKTROPHYSIK

(THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK)

10. LEHRBRIEF · Unveränderter Nachdruck 1970

II. AUSGABE

Nach der Vorlesung
von Prof. Dr. phil. (em.) Georg Mierdel

verfaßt für das Fernstudium
von Dr.-Ing. Edgar Drechsler

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN · 1970

VT-Bestell-Nr. 9083 II/10 · Auflage 2150 Expl. · Veröffentlicht unter Ag 628/61/70/DDR
Verfaßt für das Direktorat für Weiterbildung der Technischen Universität Dresden · Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Technischen Universität Dresden · Verlag: VEB Verlag Technik, 102 Berlin
Im Offsetdruck hergestellt von dem VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza V/12/6

3. Kapitel: Stromleitung im Hochvakuum (Fortsetzung)

[65] Geometrische Elektronenoptik

1. Grundsätzliches: Mit „Elektronenoptik" bezeichnet man die Berechnung von Elektronen- oder Ionenbahnen im Vakuum bei verschiedenartigen elektrischen oder magnetischen Feldern und ihre Einordnung in ein von der „Licht"-Optik her bekanntes Schema. Die Elektronenoptik (es sei im folgenden der Kürze wegen stets von Elektronen die Rede, wenn auch die Optik positiver Ionen eine immer steigende Bedeutung erlangt) verdankt ihre Existenz gewissen Analogien zwischen Trägerbahnen in elektrischen bzw. magnetischen Feldern und den Bahnen von Lichtstrahlen in verschieden brechenden Medien. Physikalisch sind sich beide Optiken wesensfremd. Sie unterscheiden sich insbesondere wie folgt:

> Im Falle der Lichtoptik existiert ein an Materie gebundenes, meist sprunghaft veränderliches Brechungsvermögen [1], dessen gestaltsbedingte Ortsabhängigkeit eine Krümmung bzw. Knickung der Lichtstrahlen verursacht.
>
> Im Falle der Elektronenoptik wird ein zumeist kontinuierliches Brechungsvermögen durch materiefreie elektrische bzw. magnetische Felder willkürlich geschaffen, so daß die Elektronenbahnen im allgemeinen stetig gekrümmt sind.

In den folgenden Betrachtungen wollen wir uns auf die für die Praxis wichtigere geometrische Elektronenoptik beschränken mit dem Ziel, alle jene Vorrichtungen zu berechnen und zu konstruieren, die in der Lichtoptik den Prismen und Linsen bzw. den daraus entwickelten Geräten (Mikroskope) entsprechen.

2. Analogien zwischen Licht- und Elektronenoptik:

a) Das elektronenoptische Brechungsgesetz: Die Analogie zwischen Lichtoptik und Elektronenoptik zeigen wir zunächst am Durchgang eines Lichtstrahles durch die Trennfläche zweier verschieden brechender Medien und am Durchgang eines Elektronenstrahles durch eine Schicht, in der sich das elektrostatische Potential und damit gemäß (623) die Elektronengeschwindigkeit sprunghaft ändert.
In der Lichtoptik wird das Verhältnis der Brechungszahlen n_1 und

---

1) Z.B. Übergang eines Lichtstrahles von Luft in Glas.

n_2 beim Übergang eines Lichtstrahles vom optisch dünnen zum optisch dichten Medium durch das Snelliussche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{u_1}{u_2} \qquad (640a)$$

festgelegt. Es bedeuten hierbei u_1 und u_2 die (Phasen-)Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien, an deren Grenze die Brechung stattfindet (Bild 290).

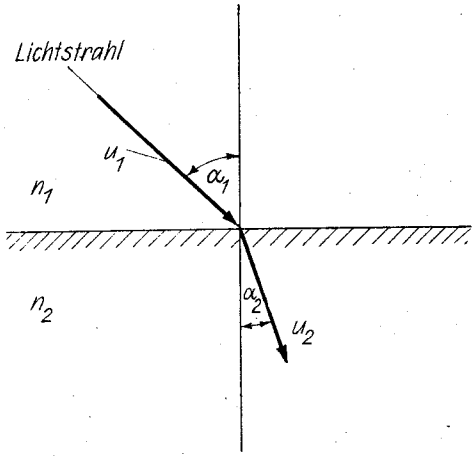

Bild 290
Brechung eines Lichtstrahles an der Grenzfläche zweier optisch verschieden dichter Medien

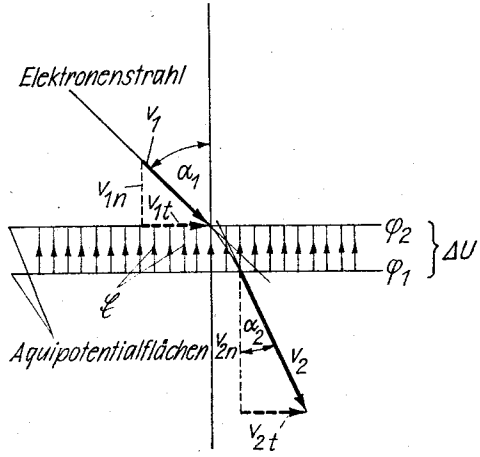

Bild 291
Brechung eines Elektronenstrahles an Sprungflächen des Potentials

Das elektronenoptische Analogon dazu ist der Durchgang eines Elektronenstrahles durch das elektrische Feld zwischen zwei Äquipotentialflächen, die in der Ebene als Linien erscheinen (Bild 291). Der Potentialunterschied zwischen diesen beiden Linien sei

$$\Delta U = \varphi_2 - \varphi_1$$

Sein Vorzeichen sei so, daß ein von oben einfallender Träger (Elektron oder Ion) beim Durchlaufen der Feldzone beschleunigt wird. Von dieser Beschleunigung wird jedoch nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit berührt, während die Tangentialkomponente unverändert bleibt. α_1 sei der Einfallswinkel.

Es gilt also

$$v_{1t} = v_{2t} ,$$

und mit $v_{1t} = v_1 \sin \alpha_1$ und $v_{2t} = v_2 \sin \alpha_2$ folgt:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} \qquad (640b)$$

Kennzeichnend an dieser Analogie ist also, daß das Verhältnis

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

in der Lichtoptik dem Verhältnis der Phasengeschwindigkeiten des Lichtes direkt proportional, in der Elektronenoptik dagegen dem Verhältnis der Gruppengeschwindigkeiten der Materiewellen umgekehrt proportional ist. Zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit besteht über die Lichtgeschwindigkeit c der Zusammenhang

$$vu = c^2 ,$$

womit sich der Unterschied der Gleichungen (640a) und (640b) erklärt.

Gemäß (623) verhalten sich die Totalgeschwindigkeiten v_1 und v_2 wie die Wurzeln aus den Potentialen φ_1 und φ_2, so daß folgt

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}} = \sqrt{1+\frac{\Delta U}{\varphi_1}} \qquad (640c)$$

Damit haben wir das elektronenoptische Brechungsgesetz für die Trägerbewegung gefunden, das sich sofort mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz der Lichtoptik in Beziehung setzen läßt. Es gilt

$$\sqrt{1+\frac{\Delta U}{\varphi_1}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (640d)$$

Überall dort, wo φ = konst. ist, haben also die Träger konstante Geschwindigkeit und damit ein konstantes Brechungsverhältnis. Hat dagegen, wie an jeder elektrischen Doppelschicht [1], das Potential eine Sprungstelle ΔU, so ändern sich die Geschwindigkeit v und das Brechungsverhältnis ebenfalls sprunghaft. Eine elektrische Doppelschicht entspricht also in der Lichtoptik einer Trennfläche zwischen zwei verschieden brechenden Medien, wie z.B. zwischen Luft und Glas.

1) Vergleiche Lehrbrief 3, Seite 124/125

b) Unstetigkeitsflächen als Linsensysteme: Die Eigenschaft von Glaslinsen, Lichtstrahlen zu sammeln oder zu zerstreuen, ist durch deren Form bereits fest vorgegeben. Als elektronenoptisches Gegenstück zu diesen Glaslinsen kann man unmittelbar die aus einem Drahtnetzpaar aufgebauten Elektronenlinsen bezeichnen. Je nach der Polarität des am äußeren oder inneren Drahtnetz liegenden Potentials läßt sich eine Sammel- oder Streuwirkung erzielen. So hat beispielsweise die in Bild 292a dargestellte, ihrer Form nach als Konvexlinse zu bezeichnende Netzanordnung für Elektronen eine Sammelwirkung, wenn das Innennetz positiver als das Außennetz gemacht wird. Die Elektronen werden dadurch beim Eintritt beschleu-

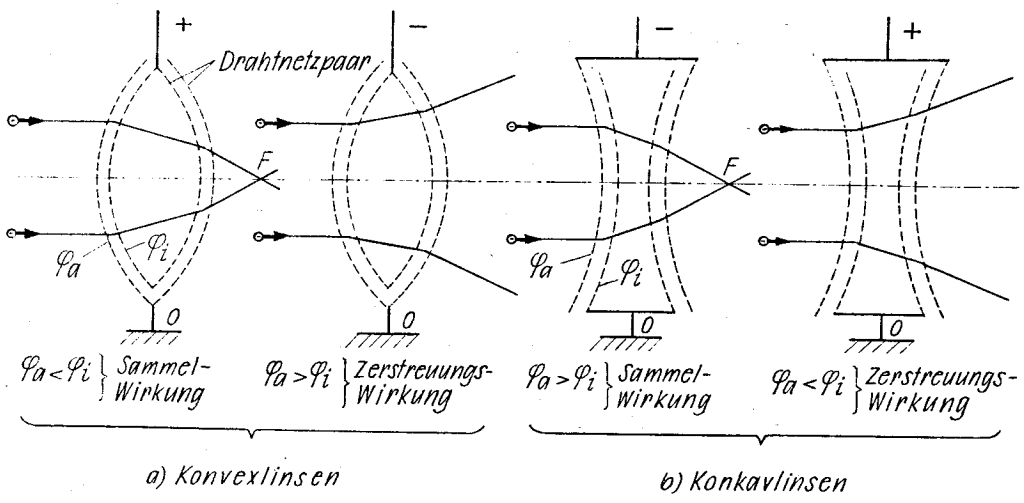

Bild 292
Verwendung von kugelig geformten Drahtnetzpaaren als Elektronenlinsen

nigt, beim Austritt aber wieder auf die ursprüngliche Geschwindigkeit verzögert. Da die Brechung des Elektronenstrahles an Sprungflächen des Potentials wie bei Lichtstrahlen an einer konvexen Glaslinse erfolgt, resultiert gemäß (640) insgesamt eine Sammelwirkung. Wird dagegen das Außennetz positiver als das Innennetz, so wird in ähnlicher Weise der Elektronenstrahl zerstreut.

Bei ihrer Form nach als Konkavlinsen zu bezeichnenden Netzanordnungen (Bild 292b) ergeben sich für Elektronen bei gleicher Potentialverteilung die umgekehrten Verhältnisse hinsichtlich Sammel- und Zerstreuungswirkung.

Die hier beschriebenen Elektronenlinsen besitzen nur ein grundsätzliches Interesse als direkte Analoga zu den Glaslinsen der Lichtoptik. Technisch sind sie jedoch sehr unvollkommen, da der Durchgriff des Feldes durch die Drahtmaschen zu mancherlei Störungen Anlaß gibt. Diese Störungen sind im Grunde die gleichen, die sich im lichtoptischen Fall ergeben würden, wenn man die Oberfläche der Glaslinse mit einer kreuzweisen Riffelung versehen würde. Darüber hinaus macht die genaue Formgebung und Montage der Drahtnetze bei der Herstellung so große Schwierigkeiten, daß Elektronenlinsen der beschriebenen Art für technische Zwecke nicht in Betracht kommen.

Man verzichtet aus den genannten Gründen bewußt auf die Einführung von Unstetigkeitsflächen und verwendet vielmehr in der Praxis die stetige Krümmung von Trägerstrahlen in räumlich ausgedehnten elektrischen und magnetischen Feldern. Das lichtoptische Analogon hierzu ist z.B. die Brechung von Lichtstrahlen in der irdischen Atmosphäre:

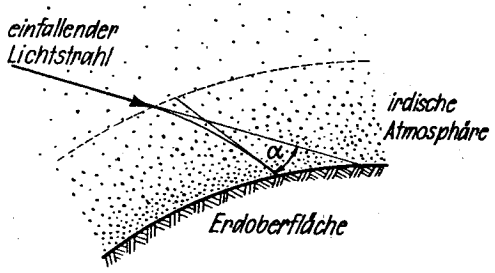

Bild 293
Stetige Brechung von Lichstrahlen in der irdischen Atmosphäre

Die mit der Höhe stetig abnehmende Dichte hat eine stetige Abnahme der Brechungszahl und damit eine stetige Krümmung der Lichtstrahlen zur Folge (Bild 293). Dieses ist unter anderem auch der Grund dafür, daß die am Horizont stehenden Himmelskörper in einer höheren Stellung gesehen werden, als sie tatsächlich einnehmen, oder daß die Sonne in Wirklichkeit bereits untergegangen ist, wenn wir sie gerade noch am Horizont erblicken.

Nach den vorstehenden Betrachtungen sind die in der Praxis verwendeten Vorrichtungen zur Fokussierung von Strahlen nach dem Gesichtspunkt der technisch vollkommensten Realisierung folgendermaßen zu unterscheiden: Die Lichtoptik verwendet gekrümmte Unstetigkeitsflächen des Brechungsindex (Glaslinsen) und demzufolge auch unstetig geknickte Strahlen, die Elektronenoptik dagegen stetig verlaufende elektrische oder magnetische Felder und damit auch stetig gekrümmte Strahlen.

3. Sammelwirkung elektrischer und magnetischer Felder:

a) Die Brechung von Trägerstrahlen im kontinuierlichen elektrischen Feld: Für die Ablenkung der Trägerbahnen an Sprungflächen des Potentials gilt gemäß (640b,c) grundsätzlich der Zusammenhang

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2 \qquad (641a)$$

oder auch

$$\sqrt{\varphi_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\varphi_2} \sin \alpha_2 \qquad (641b)$$

Reiht man eine Vielzahl solcher elementar kleiner Sprungflächen aneinander (Bild 294), so resultiert daraus im Grenzfall ein kontinuierlich verteiltes Potentialfeld. Geschwindigkeit v und Winkel α müssen dann an jeder Stelle des Feldes der Bedingung

$$v \sin \alpha = \sqrt{\varphi} \sin \alpha = \text{konst.} \qquad (642)$$

genügen. Mit Hilfe von (642) läßt sich bei vorgegebener Potentialverteilung die Bahn eines Trägers zeichnerisch konstruieren. Hierbei ist α immer der Winkel zwischen Strahlrichtung und der Normalen auf der Niveaufläche φ bzw. dem elektrischen Feldstärkevektor $\mathfrak{E}$ (Bild 294), der ja bekanntlich senkrecht auf den Flächen φ = konst. steht.

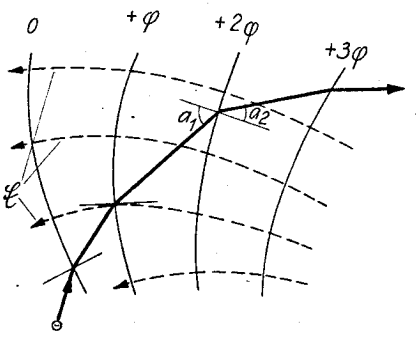

Bild 294
Elektronenstrahl im elektrischen Potentialfeld

Wir müssen nun untersuchen, welche kontinuierlich verlaufende elektrische (später auch magnetische) Felder auf Elektronen oder auch Ionen eine Sammelwirkung ausüben, also als Sammellinse wirken, da nur diese Felder zur Abbildung im optischen Sinne geeignet sind.

b) Sammeleigenschaft rotationssymmetrischer elektrischer Felder: Eine besondere Rolle spielen in der Elektronenoptik die rotationssymmetrischen Felder. Es gilt der Satz, daß jedes rotationssymmetrische, wenigstens auf der Symmetrieachse und in deren nächsten Umgebung stetige Feld eine Punktabbildung vermittelt. Diese Abbildung ist um so genauer, je mehr die Trägerstrahlen in der Nähe der Symmetrieachse verlaufen (H. Busch, 1926).

Das lichtoptische Gegenstück zu einem rotationssymmetrischen Feld

wäre also ein materieerfüllter Raum, dessen Dichte mit dem Radius stetig abnimmt.

Die Sammelwirkung rotationssymmetrischer Felder läßt sich quantitativ ohne weiteres nachweisen. Tritt nämlich ein vom Dingpunkt P (Bild 296) ausgehender Trägerstrahl (z.B. Elektronenstrahl) mit der Geschwindigkeit v in ein derartiges Feld ein, so gilt entsprechend (620) für die Trägerbewegung in radialer Richtung die Gleichung

$$m \frac{dv_r}{dt} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = -q\, E_r \qquad (643)$$

Die Radialkomponente v_r der Trägergeschwindigkeit soll hierbei klein sein gegen die Axialkomponente v_z, so daß also die Radialkomponente E_r der elektrischen Feldstärke die Trägerenergie nur unwesentlich ändert..

Zur Lösung von (643) ist vorerst noch die Feldstärkekomponente E_r aus dem vorgegebenen Potentialverlauf längs der Symmetrieachse zu bestimmen. Wir nehmen hierzu an, daß der gesamte Feldraum ohne Raumladungen sei [1], also $\operatorname{div} \mathfrak{d} = 0$ bzw. $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ gilt. In diesem Falle muß nach Gauß (Gl. 56) der gesamte, durch die Oberfläche eines Elementarzylinders (Bild 295) gehende Fluß des Vektors $\mathfrak{E}$ gleich Null sein. Der Gesamtfluß ergibt sich aus

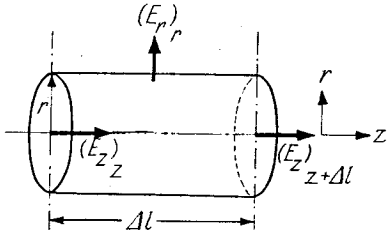

Bild 295
Zur Formulierung der Divergenzbedingung

den Anteilen

$(E_r)_r\, 2\pi r\, \Delta l = E_r\, 2\pi r \Delta l$ ⟶ Fluß von $\mathfrak{E}$ durch Mantelfläche

$-(E_z)_z\, \pi r^2 = -E_z\, \pi r^2$ ⟶ Fluß von $\mathfrak{E}$ durch Bodenfläche

$(E_z)_{z+\Delta l} \pi r^2 = (E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta l) \pi r^2$ ⟶ Fluß von $\mathfrak{E}$ durch Deckfläche

zu

$$\oint \mathfrak{E} \cdot d\mathfrak{f} = E_r\, 2\pi r\, \Delta l + \frac{\partial E_z}{\partial z} \pi r^2 \Delta l = 0 \,,$$

und es folgt für die Radialkomponente des Feldes

$$E_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (644a)$$

1) Diese Annahme trifft nur für sehr kleine Stromstärken im Elektronenstrahl zu.

oder, da ja $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ ist,

$$E_r = \frac{r}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (644b)$$

Die radiale Komponente der elektrischen Feldstärke ist also dem Abstand r von der Symmetrieachse direkt proportional.
Die Bewegungsgleichung (643) lautet nunmehr

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{q}{2m} r \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (645)$$

Die Trägerbewegung in r-Richtung und damit die sammelnde bzw. zerstreuende Wirkung von beliebigen, durch das Raumpotential vorgegebenen Feldern kann nun durch Lösung der Gl. (645) bestimmt werden.
Steigt das Potential längs der Symmetrieachse beispielsweise parabelförmig nach der Funktion

$$\varphi = \varphi(z) = Az^2 + Bz + C \qquad (646)$$

an (dargestellt in Bild 296), so läßt sich für diesen Fall eine sammelnde (fokussierende) Eigenschaft rasch nachweisen: Die zweifache Differentiation von (646) nach z gibt

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 2A = \text{konst.},$$

und die Bewegungsgleichung (645) geht über in die Schwingungsgleichung

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -c\,r \qquad (647)$$

Dabei ist für $c = qA$ zu setzen.

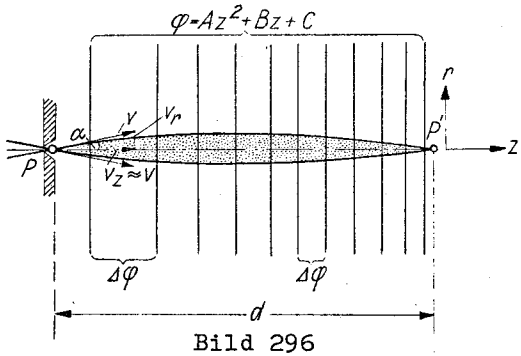

Bild 296
Sammelwirkung radialsymmetrischer, elektrischer Felder (parabelförmig ansteigendes Potentialfeld)

Diese Gleichung sagt aus, daß auf einen Ladungsträger von der Masse m und der Ladung q eine <u>quasielastische Rückstellkraft</u> wirkt. Ein schräg zur Symmetrieachse hineingeschossenes Elektron führt unter Einfluß dieser Rückstellkraft eine harmonische Schwingung um diese Achse aus, deren Frequenz

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

wird. Die Dauer einer halben Schwingung, also die Zeit, nach der

das Teilchen stets wieder die Achse erreicht, folgt daraus zu

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

Sie ist unabhängig von der Radialkomponente der Einschußgeschwindigkeit, also auch vom Winkel zwischen Schußrichtung und Symmetrieachse, sofern nur der letztere klein genug ist, daß die Entfernung des Elektrons von der Achse nicht zu groß wird. Man bezeichnet Strahlen, die dieser Bedingung genügen, als achsennahe Strahlen. Da die Geschwindigkeit derartiger Strahlen in z-Richtung für alle von einem Punkt P ausgehenden Ladungsträger annähernd gleich ist, treffen sich diese nach Durchlaufen der Strecke

$$d = v_z \frac{T}{2} \approx v \frac{T}{2}$$

im Punkt P' (Bildpunkt) auf der Symmetrieachse wieder (Bild 296). Dies wiederholt sich nach jedem Umlauf. Man findet also in den Abständen d, 2d, ... nd von der punktförmigen Elektronenquelle (Gegenstand) Bildpunkte.

Das hier speziell betrachtete radialsymmetrische Feld besitzt somit Sammeleigenschaft.

In entsprechender Weise lassen sich gleiche abbildende Eigenschaften nachweisen, wenn die rechte Seite der Gleichung (645) nicht nur von r, sondern auch noch von z abhängt. Im allgemeinen kann jedem radialsymmetrischen elektrischen Feld, das einer linearen Differentialgleichung für r genügt, bei geeigneter Vorzeichenwahl Sammeleigenschaft zugeschrieben werden.

c) Die Linsenwirkung von Lochblenden: Wird in das homogene Feld eines Plattenkondensators eine, mit einer kreisrunden Öffnung versehene Blende gebracht, so greifen einige Kraftlinien des ursprünglich homogenen Feldes durch diese Öffnung hindurch, wenn die eingebrachte Blende nicht gerade das ihrer Lage entsprechende Ortspotential besitzt. Infolge des Durchgreifens des Feldes durch die Blendenbohrung entsteht die für eine ausgeprägte Linsenwirkung nötige Wölbung der Potentialflächen. Bezeichnet man die eine Kondensatorplatte als Katode K, die andere als Anode A (Bild 297) und ordnet der ersten das Potential $\varphi = 0$, der letzten das Potential $\varphi = \varphi_a$ zu, so herrscht im Abstand b von der Katode das Ortspotential

$$\varphi_o = \varphi_a \frac{b}{s} \quad ,$$

wenn s der Abstand der beiden Platten ist. Gibt man nun der Lochblende ein Potential φ_B, das gleich dem Ortspotential φ_o ist, so ändert sich das ursprünglich vorhandene Feld zwischen Katode und Anode überhaupt nicht. Ein von der Katode K ausgehender Elektronenstrahl würde also nur ganz normal abgelenkt. Dagegen wirkt die Blende auf achsennahe Strahlen sofort als Linse, wenn φ_B verschieden von φ_o gemacht wird. Grundsätzlich sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $\varphi_B > \varphi_o$. Da das innerhalb der Blendenöffnung liegende Potential tiefer liegt als das Blendenpotential selbst, wird ein von der Katode ausgehender Elektronenstrahl zerstreut. Die Lochblende wirkt in diesem Fall als Zerstreuungslinse (Bild 297a).

Fall 2: $\varphi_B < \varphi_o$. Das Potential der Blendenöffnung ist größer als das der Blende selbst, so daß also ein von der Katode ausgehender Elektronenstrahl gebündelt wird. Die Lochblende wirkt in diesem Fall als Sammellinse (Bild 297b).

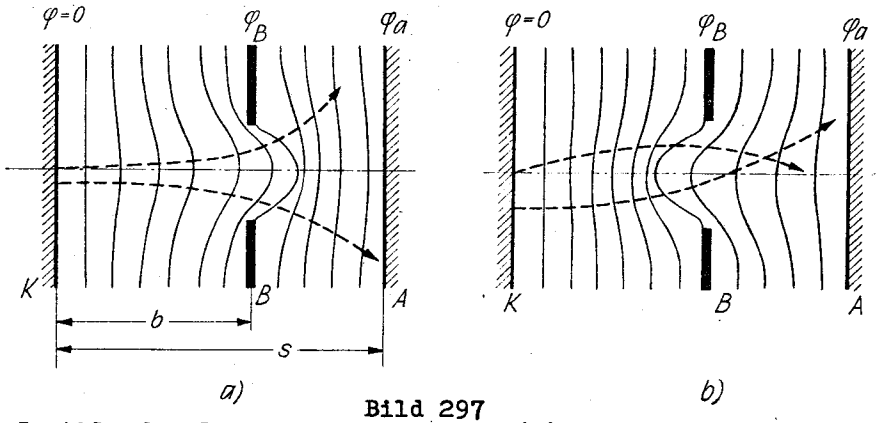

Bild 297
Lochblende als Zerstreuungslinse (a) bzw. als Sammellinse (b)

Durch Zusammensetzen zweier Lochblenden erhält man eine Linse, die zwei Raumteile konstanten, aber verschiedenen Potentials voneinander trennt. In Anlehnung an eine Eigenart der Lichtoptik, das Objekt in einen Stoff höherer Brechungszahl als Luft (z.B. Öl) einzubetten, bezeichnet man diese Feldform als Immersionslinse. Die am häufigsten auftretende Art der elektrischen Immersionslinse

ist die Beschleunigungslinse, die beispielsweise für Braunsche Röhren meist in der Form zweier gegeneinander aufgeladener Koachsialzylinder benutzt wird (Bild 298). Die Sammelwirkung des linken Teiles dieser Linse überwiegt stets die Zerstreuungswirkung des rechten Teiles, da die Elektronen im sammelnden Feld langsamer laufen und daher stärker zur Achse hingelenkt, als sie im zerstreuenden Feld von der Achse fortgelenkt werden. Die Immersionslinse ist daher stets eine Sammellinse.

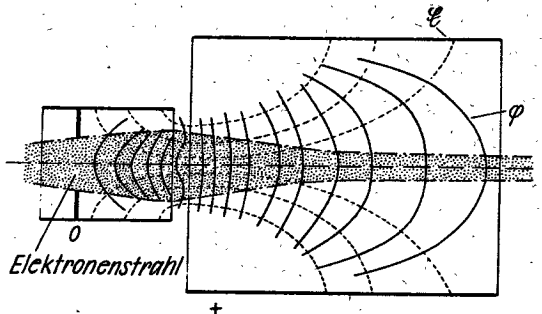

Bild 298
Immersionslinse, aus zwei koachsialen Zylindern bestehend

Um eine Linse mit beiderseits gleichem, konstantem Potential zu erhalten, wie sie optisch einer einzelnen Glaslinse entspricht, muß eine dritte Lochblende hinzugenommen werden (Bild 299).

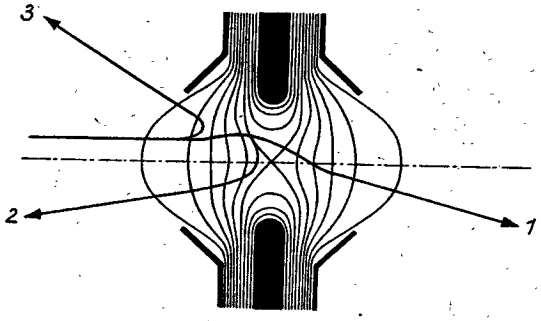

Bild 299
Einzellinse, bei stark negativem Mittelpotential für Elektronen als Spiegel wirkend. 1,2,3 Bahnen von Elektronen mit abnehmenden Anlaufspannungen

Je nach dem Vorzeichen der Ladungsträger und den Vorzeichen der Spannung zwischen der mittleren und den äußeren Elektroden findet sich in Feldmitte ein Potentialsattel oder ein Potentialberg. Diese als Einzellinsen bezeichneten Feldanordnungen sind immer Sammellinsen, da die Ladungsträger stets stärker zur Achse hin- als von ihr fortgelenkt werden (vgl. Bahnverlauf 1 in Bild 299). Eine Einzellinse kann, wie im übrigen jede andere Linse, als Spiegel wirken, wenn der Potentialberg der Linse höher ist als die Anlaufspannung der Ladungsträger. Bild 299 veranschaulicht dies am Beispiel der Einzellinse. Man erkennt, daß diese ein Sammel- oder Zerstreuungsspiegel sein kann, je nach dem wie weit der Träger in das Feld

einzudringen vermag. Für genügend langsame Träger (Bahn 3 in Bild 299), die nicht mehr den sammelnden Feldteil in der Linsenmitte erreichen, tritt nur noch der äußere, zerstreuende Feldteil in Kraft. Die Bahnen der Träger nahe ihrer Umkehrstelle sind im allgemeinen verwickelt. Es können mehrfache Pendelungen um die Achse stattfinden, wobei auch die später noch zu besprechenden Linsenfehler stark ins Gewicht fallen. Trotzdem bleiben die Abbildungseigenschaften erhalten, und es lassen sich mit solchen Spiegeln verhältnismäßig gute Elektronenbilder herstellen.

d) Die Sammelwirkung des homogenen Magnetfeldes: Schon unter [64] konnten wir feststellen, daß auch homogene Magnetfelder eine richtungsfokussierende Wirkung besitzen. Sie folgt für ein vollkommen homogenes Magnetfeld ohne weiteres aus der früher angegebenen Beziehung (627), wenn wir die Bewegung eines Ladungsträgers während der Zeitdauer eines vollständigen Umlaufes verfolgen. Die Umlaufzeit τ, während der ein Träger von der Geschwindigkeit v im senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung stehenden homogenen Magnetfeld eine Kreisbahn zurücklegt, beträgt mit (627a)

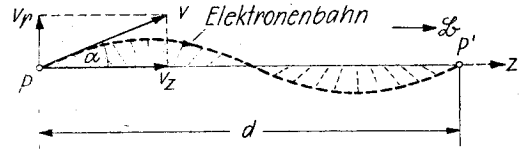

Bild 300
Sammelwirkungen eines homogenen Magnetfeldes

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \qquad (648)$$

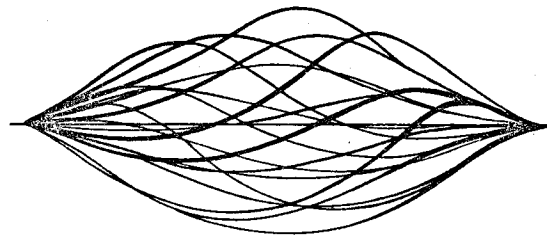

Bild 301
Modell der Elektronenbahnen im homogenen Magnetfeld

Im homogenen Magnetfeld ist also die Umlaufzeit oder Umlauffrequenz der Ladungsträger von der Trägergeschwindigkeit unabhängig.

Werden Träger von einheitlicher Energie in das homogene Magnetfeld schräg eingeschossen, wobei die Schußrichtung mit der Feldrichtung einen nur kleinen Winkel α bilden möge, so ergibt sich als Trägerbewegung eine Schraubenbahn gemäß Bild 300. Da nach (648) die Umlaufzeit von der Transversalgeschwindigkeit $v_r = v \sin \alpha$ unabhängig ist, wird sie auch nicht vom Winkel α beeinflußt. Es

treffen folglich alle unter einem beliebigen (kleinen) Winkel α eingeschossen Ladungsträger nach Ablauf der Zeit τ wieder auf der Achse zusammen. Die in Feldrichtung während dieser Zeit durchlaufene Strecke d erreicht also bei einheitlicher Longitudinalgeschwindigkeit $v_z = v \cos \alpha$ den Wert

$$d = v_z \tau \approx v \tau = \frac{2\pi m v}{qB} ,$$

wenn für kleine Winkel $\cos \alpha \approx 1$ gesetzt wird. Wir bezeichnen d als Knotenabstand. Die Elektronenbahn hat den in Bild 300 skizzierten Verlauf. Das homogene Magnetfeld wirkt immer als Sammellinse. Die Gestalt von Elektronenbahnen zwischen zwei Sammelpunkten (Knoten) zeigt im Modell Bild 301.

e) Die Sammelwirkung des inhomogenen Magnetfeldes: Eine weitaus größere Sammelwirkung als das homogene Magnetfeld besitzen kurze inhomogene und dazu radialsymmetrische Magnetfelder (Lenard,1902). Die einfachste Erzeugung eines derartigen Feldes geschieht durch einen mit Gleichstrom gespeisten Drahtring (Bild 302). Inwieweit sich ein solches Feld zur Sammlung von Trägerbahnen eignet, zeigen folgende Überlegungen: Wird ein Elektron annähernd parallel zur Symmetrieachse in das inhomogene Feld eines Kreisstromes hineingeschossen, so wirkt auf dieses die Kraft

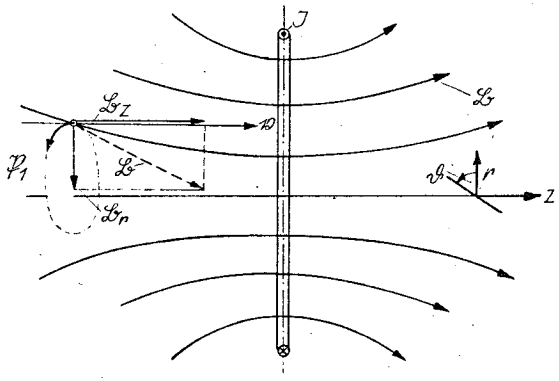

Bild 302
Zur Sammelwirkung des inhmogenen Magnetfeldes

$$\mathfrak{P}_m = q(w \times \mathfrak{B}) \qquad (649)$$

Verwendet man als Basis Zylinderkoordinaten, so ist der Feldvektor $\mathfrak{B}$ durch die Komponenten B_r, B_z und B_ϑ festgelegt. Im Falle des radialsymmetrischen Feldes wird hiervon $B_\vartheta = 0$. Entsprechend dem Kreuzprodukt in (649) ist für die auf das Elektron ausgeübte Kraft im wesentlichen die senkrecht zur Einschußrichtung liegende Radialkomponente B_r maßgebend. Die Kraft hat für annähernd achsenparallele Elektronenstrahlen ($v \approx v_z$) den Betrag

$$P_1 \approx q \, v \, B_r$$

Ihre Richtung steht senkrecht auf der Zeichenebene (vgl. Bild 302), d.h., der Elektronenstrahl wird in der ϑ-Richtung abgelenkt. Die hierdurch verursachte Tangentialgeschwindigkeit v_ϑ bildet nun aber mit der Achsialkomponente B_z des Feldes wieder einen rechten Winkel, so daß eine weitere Kraft mit dem Betrage

$$P_2 \approx q\, v_\vartheta\, B_z$$

entgegengesetzt zur positiven r-Richtung auf das Elektron wirkt. Da diese Kraft den Elektronenstrahl zur Achse hinlenkt, ist sie für die Linsenwirkung des radialsymmetrischen, inhomogenen Magnetfeldes verantwortlich.

Die Sammelwirkung kommt auch dann zustande, wenn sich das Vorzeichen der Ladung bzw. der Induktion $\mathfrak{B}$ umkehrt. Es ändert sich dabei lediglich die Richtung der Geschwindigkeitskomponente v_ϑ, wogegen die zur Achse gerichtete Radialgeschwindigkeit v_r ihr Vorzeichen behält.

Charakteristisch für die Abbildungseigenschaft des Magnetfeldes allgemein ist die bei elektrischen Feldern nicht auftretende Verdrehung des Bildes infolge der Ablenkung des Trägerstrahles in ϑ-Richtung.

f) Die technische Ausgestaltung magnetischer Linsen: Die einfachste Form der magnetischen Linse ist das Feld eines Kreisstromes mit einer oder mehreren Windungen (Spule). Allerdings sind derartige Linsen für eine technische Verwendung weniger geeignet, da sie infolge des weit ausgedehnten Feldes in z-Richtung einen zu langen räumlichen Wirkungsbereich haben. Das Bestreben, möglichst kleine Brennweiten zum Zwecke hoher Vergrößerungen zu erzielen, hat zu einer immer stärkeren Zusammendrängung des Feldes auf einen kleinen Bereich längs der Achse geführt. Ein besonders wirksames Mittel hierzu ist die eisengekapselte Stromspule nach Bild 303. Der mit dem Strom verkettete Magnetfluß geht durch die Eisenarmierung, die jedoch an einer Stelle unterbrochen ist. Der dort austretende Streufluß (vgl. Bild 303) liefert ein Feld, daß den geforderten Ansprüchen genügt.

Eine weitere Verbesserung der Abbildungseigenschaft inhomogener Magnetfelder ergibt sich bei der Ausbildung von sogenannten Polschuhen gemäß Bild 304. Die Brennweite f liegt dort in der Größenordnung des Durchmessers der Polschuhbohrung.

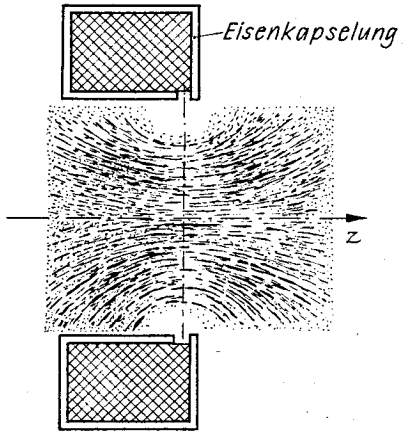

Bild 303
Gekapselte Magnetspule mit Kraftlinienbild

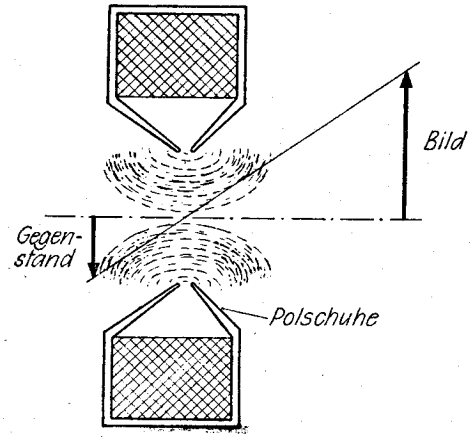

Bild 304
Polschuhspule nach B.v.Borries und E. Ruska

4. Bestimmung der Brennweite: Von den lichtoptischen Größen, die die Abbildungseigenschaften elektrischer und magnetischer Linsen kennzeichnen, interessiert in erster Linie die Brennweite. Experimentell kann die Brennweite grundsätzlich nach den gleichen Verfahren bestimmt werden, wie sie aus der Lichtoptik bekannt sind. Das nächstliegende Verfahren besteht darin, daß man aus der Abbildung eines Gegenstandes die Abstände g zwischen Gegenstand und Linse sowie b zwischen Linse und Bild bestimmt und die Brennweite f aus der Beziehung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (650)$$

ermittelt [1]. Rein rechnerisch folgt die Brennweite f aus dem Feldverlauf und den Bewegungsgesetzen der Elektronen. Bezeichnen wir wie in der Lichtoptik den Kehrwert der Brennweite als Brechkraft, so lassen sich für die rechnerische Bestimmung der Brennweiten elektrischer und magnetischer Linsen (bei Vernachlässigung der Linsendicke gegenüber der Brennweite) Ausdrücke angeben, die wir nachfolgend nur kurz beschreiben wollen.

a) Die Brennweite elektrischer Linsen: Wenn längs der Symmetrieachse der Verlauf des elektrischen Potentials $\varphi(z)$ bekannt ist, läßt sich für die Brechkraft 1/f die Beziehung

1) Für achsenparallele Strahlen wird $g = \infty$ und folglich $b = f$!

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{4\sqrt{\varphi(L)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\varphi(z)}} \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} \, dz \qquad (651)$$

angeben. $\varphi(L)$ ist der Wert des Achsenpotentials am Ort der Linse. Da gemäß (623a) $v \sim \sqrt{\varphi}$ ist, ändert sich also die Brennweite f_e elektrischer Linsen proportional mit der Geschwindigkeit der Elektronen am Ort der Linse. Wenn durch Potentiometer dafür gesorgt ist, daß die Spannungsverhältnisse an allen Elektroden konstant sind, ist die Brennweite und damit die Abbildung der Linse nicht vom Absolutwert der Gesamt-Betriebsspannung abhängig, so daß deren Stabilisierung nicht erforderlich ist.

b) Die Brennweite magnetischer Linsen: Ist längs der Symmetrieachse der Verlauf der magnetischen Induktion $B(z)$ bekannt, so kann die Brechkraft einer magnetischen Linse nach der Beziehung

$$\frac{1}{f_m} = \frac{q}{8 m U_o} \int_{-\infty}^{+\infty} B(z)^2 dz \qquad (652)$$

berechnet werden. U_o ist die Einschußgeschwindigkeit der Elektronen im Voltmaß, die bekanntlich beim Passieren eines Magnetfeldes konstant bleibt. Strenggenommen gilt (652) wie auch in der Lichtoptik nur für optisch dünne Linsen. Bei Magnetfeldern ist diese Voraussetzung nur in Annäherung erfüllt, da diese Felder in der Regel ziemlich weit über die z-Achse ausgedehnt sind. Eine exakte Berechnung von f_m muß deshalb nach einem Iterationsverfahren erfolgen. Auch die grafisch stückweise Konstruktion der Elektronenbahnen im Magnetfeld gibt eine Möglichkeit zur Ermittlung der Brennweite magnetischer Linsen.

5. Linsenfehler: Wie in der Lichtoptik unterscheiden wir auch in der Elektronenoptik zwei Gruppen von Linsenfehlern. Die eine Gruppe umfaßt die Fehler, die im ganzen Bildbereich wirksam sind und daher das Bild ganz allgemein verschlechtern. Typische Vertreter sind die sphärische und chromatische Aberration. Zur anderen Gruppe dagegen gehören die Fehler, die auf der optischen Achse verschwinden, aber nach außen hin anwachsen (Bildfeldwölbung und Astigmatismus).

Die sphärische Aberration tritt bei Elektronenlinsen in Erscheinung, wenn der Öffnungswinkel α der Elektronenbündel zu groß wird.

Die dann nicht mehr achsennahen Randstrahlen werden stärker gebrochen und folglich in kürzerem Abstande als die achsennahen Zentralstrahlen wieder auf der Achse vereinigt. Im Gegensatz zur Lichtoptik ist hier allerdings eine Abblendung der mangelhaften Linse kaum erforderlich, da der Öffnungswinkel der von einem Dingpunkt ausgehenden Elektronenstrahlung von Natur klein ist.
Die üblichen Öffnungswinkel von Lichtmikroskopen (Glaslinsen) liegen bei

$$\sin \alpha \approx 1 \,, \tag{653a}$$

die von Elektronenmikroskopen (Elektronenlinsen) bei

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx 0{,}001 \tag{653b}$$

Die chromatische Aberration ist auf die bei nichthomogener Elektronengeschwindigkeit verschieden starke Brechung der Strahlen im Linsenbereich zurückzuführen. In der Lichtoptik wird die chromatische Aberration oft als Farbfehler bezeichnet, da Lichtstrahlen unterschiedlicher Wellenlänge λ entsprechend (640a) verschieden stark gebrochen werden.
Bildfeldwölbung und Astigmatismus werden im Gegensatz zu den oben genannten Fehlern durch schief in die Linse eintretende Elektronenstrahlen verursacht. Sie äußern sich dementsprechend in einer Unschärfe des Bildes nach dem Bildrand zu und gestatten oft nur die Ausnutzung eines kleinen Mittelbereiches der Bildfläche.
6. Technische Anwendung elektrischer und magnetischer Linsensysteme: Die Anwendungen der Elektronenoptik in der Gerätekonstruktion wollen wir nur an zwei Beispielen demonstrieren. Es sind dies das Braunsche Rohr und das Elektronenmikroskop. Darüber hinaus wird die Elektronenoptik in fast allen Röhrenkonstruktionen mit großem Erfolg systematisch angewendet. Die meisten Röhren sind überhaupt erst auf Grund eingehender Studien der Elektronenoptik zu brauchbaren Elementen der Apparatetechnik geworden.
a) Braunsche Röhre: Eines der wichtigsten Beispiele für die Verwendung von Elektronenlinsen ist die Braunsche Röhre. Obwohl sie seit ihrer Entstehung schon eine etwa 30jährige Entwicklung durchgemacht hatte, ehe überhaupt die Möglichkeit einer Elektronenoptik erkannt wurde (Busch, 1926), ist die heute erreichte hohe

Vervollkommnung der Braunschen Röhre größtenteils das Ergebnis folgerichtiger Anwendung elektronenoptischer Überlegung.
Das Aufbauschema sowie den Strahlengang einer Braunschen Röhre zeigt Bild 305. Sie besteht aus dem Elektronenstrahler E, der Linse L, den Ablenkorganen P und dem Leuchtschirm LS. Der Emissionsfleck auf der Oxydkatode K wird zunächst durch das System Wehneltzylinder (W)-Anode A_1 stark verkleinert auf einen sehr kleinen Fleck abgebildet, der dicht vor der Anodenöffnung von A_1 liegt. Da die Zylinderelektrode A_2 ein höheres positives Potential hat als A_1, werden die Elektronen beim Durchgang durch die von den beiden Zylindern A_1 und A_2 gebildete elektrische Linse L dauernd beschleunigt, und die Einschnürungsstelle im Strahlengang wird auf dem Leuchtschirm scharf abgebildet. Das Elektronenbild der als Brennfleck bezeichneten Einschnürungsstelle dient als Schreibfleck, von dem man große Schärfe und große Schreibgeschwindigkeit verlangt.

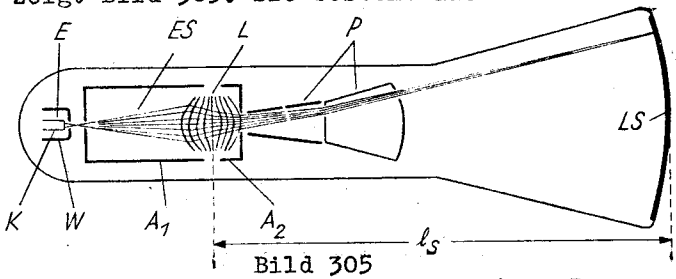

Bild 305
Aufbauschema und Strahlengang einer Braunschen Röhre. (E Elektronenstrahler, L Linse, P Ablenkplatten, ES Elektronenstrahl, LS Leuchtschirm, K Katode, W Wehneltzylinder, A_1 erste und A_2 zweite Anode)

Für die Qualität der Braunschen Röhre sind in der Hauptsache 3 Eigenschaften maßgebend:

α) Kleinheit (Schärfe) des Schreibfleckes,
β) Helligkeit des Schreibfleckes,
γ) Hohe Empfindlichkeit der Ablenkorgane.

Die Forderungen α) und β) verlangen hohe Beschleunigungsspannung und kleine Rohrlänge ℓ_s, die Forderung γ) dagegen niedrige Spannung und große Rohrlänge ℓ_s. Da sich beide Bedingungen widersprechen, muß eine Kompromißlösung gefunden werden. Mitunter beschleunigt man den Elektronenstrahl bis zu den Ablenkorganen nur wenig, so daß sich eine hohe Ablenkempfindlichkeit ergibt. Nach der Ablenkung erteilt man dann dem Strahl eine Nachbeschleunigung, die die Helligkeit des Schreibflecks wesentlich erhöht. Da das Feld der Nachbeschleunigung etwas nach vorn durchgreift, wird allerdings die Ablenkempfindlichkeit wieder etwas verringert.

b) Das Elektronenmikroskop:

α) Auflösungsvermögen: Gipfelpunkt der elektronenoptischen Entwicklung in der Gerätetechnik ist das aus der Mikroforschung nicht mehr fortzudenkende Elektronenmikroskop. Der besondere Anreiz zur Entwicklung dieses Gerätes lag darin, daß die Wellenlänge der Elektronenstrahlung nach der De-Broglieschen Beziehung (551)

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

bei Beschleunigungsspannungen von 50 ... 100 kV das rund 10^{-5}fache der Lichtwellenlänge beträgt. Damit ist die Aussicht gegeben, die Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops wesentlich zu unterbieten.
Das Auflösungsvermögen eines Lichtmikroskopes - das ist der Abstand d, den zwei benachbarte Objektpunkte mindestens haben müssen, damit sie noch deutlich voneinander getrennt („aufgelöst") erscheinen - ist durch die Wellenlänge des benutzten Lichtes gegeben. Es gilt die Abbesche Beziehung

$$d \approx \frac{\lambda}{n \sin \alpha} , \qquad (654)$$

worin n das Verhältnis der Brechungszahlen vor und hinter der Linse und α den halben Öffnungswinkel des vom Dingpunkt in die Linse gelangenden Strahlenkegels bedeuten. Den Ausdruck n sin α bezeichnet man als numerische Apertur.
Setzt man für die Wellenlänge des sichtbaren Lichtes $\lambda_L = 5000$ Å und für Immersionsöl die Brechungszahl $n \approx 3/2$, so ergibt sich nach (654) für den kleinsten noch auflösbaren Strichabstand d bei hochwertigen Immersionsobjektiven der Grenzwert $d \approx 2000$ Å. Der Einfallskegel hat dabei einen Öffnungswinkel nahe 90°. Die Vergrößerung

$$V = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Objektgröße}}$$

hat bei Lichtmikroskopen einen maximalen Wert von $V \approx 1500$. Eine Vergrößerung über diesen Wert hinaus wäre zwecklos, da die Feinheiten der Struktur dadurch nicht an Schärfe gewinnen.
Das Auflösungsvermögen eines Elektronenmikroskopes hingegen wird durch die De Brogliesche Materiewellenlänge der Elektronen begrenzt. Diese berechnet sich nach (623b) zu

$$\lambda_E = \frac{h}{mv} = \sqrt{\frac{150}{U[V]}} = 0{,}05 \text{ Å} ,$$

wenn eine Beschleunigungsspannung von beispielsweise 50 kV gewählt wird. Damit ergibt sich also ein Verhältnis der Wellenlängen

$$\frac{\lambda_L}{\lambda_E} = \frac{5000\ \text{Å}}{0{,}05\ \text{Å}} = 10^5$$

Andererseits verhalten sich jedoch gemäß (653) die Öffnungswinkel der beiden Strahlungen etwa wie

$$\frac{\sin \alpha_L}{\sin \alpha_E} \approx \frac{1}{0{,}001} = 10^3$$

Nach Gl. (654) verbessert sich also das Auflösungsvermögen gegenüber dem Lichtmikroskop rund um den Faktor

$$\frac{d_L}{d_E} = \frac{10^5}{10^3} = 100$$

Dieser immer noch beträchtliche Gewinn an Auflösungsvermögen gab den Anstoß zur Entwicklung des Elektronenmikroskopes.

β) Das magnetische und elektrostatische Elektronenmikroskop: Die ersten experimentellen Untersuchungen wurden von Ruska und Knoll vornehmlich mit magnetischen Linsen vorgenommen. Diese Entwicklung führte zum hochauflösenden Durchstrahlungsmikroskop, dessen schematischer Aufbau und Strahlengang in Bild 306b gezeigt ist. Zum Vergleich ist das Schema eines Lichtmikroskopes in Bild 306a gegenübergestellt. Auf die Wirkungsweise des magnetischen Durchstrahlungsmikroskopes wollen wir etwas näher eingehen: Zunächst wird durch einen Elektronenstrahler ein scharf gebündelter Strahl erzeugt, der das Objekt durchdringt. Die Stärke des Objekts darf wegen der geringen Durchdringungsfähigkeit der Elektronen bei den heute gebräuchlichen Spannungen von 50 ... 220 kV höchstens etwa 100 mμ bei nicht zu hohem Atomgewicht betragen. Die über dem Objekt angeordnete Linse, der Kondensor, konzentriert die Strahlung mehr oder weniger stark auf das Objekt und gestattet so eine Regulierung der Beleuchtungsstärke. Jedes Flächenelement des Objektes (beispielsweise bei P in Bild 306b) wird von einem Strahlenkegel getroffen, dessen Öffnung 2 α_k durch den Durchmesser d_{min} des Brennflecks und dessen Abstand von der Objektebene bestimmt wird. Beim Durchgang des Elektronenstrahls durch das Objektelement werden die Elektronen aus ihrer anfänglichen Richtung abgelenkt (gestreut), so daß ein entsprechend

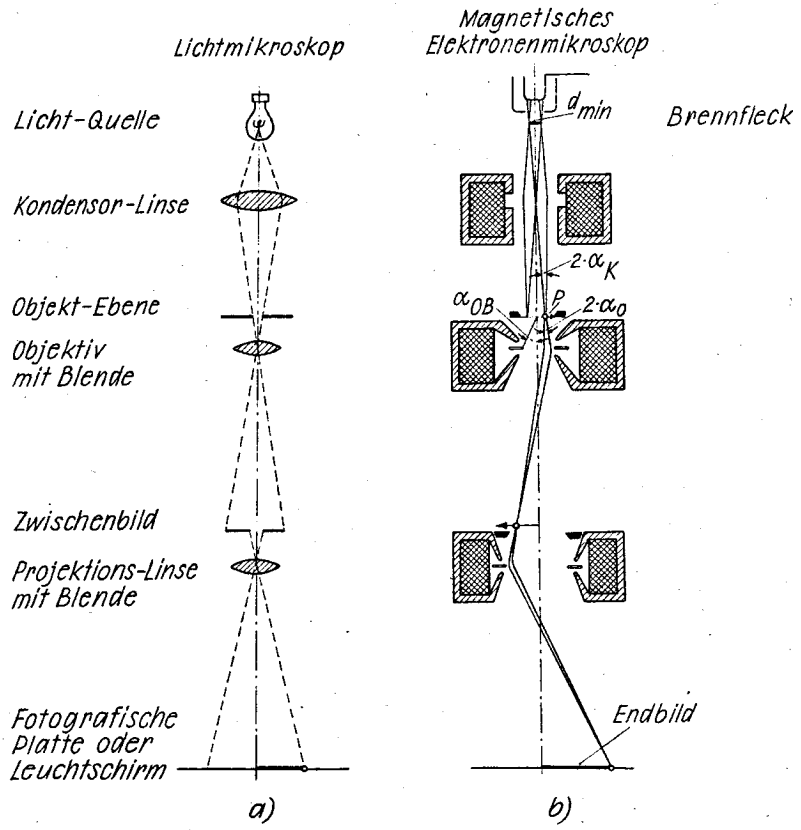

Bild 306
Schematischer Aufbau und Strahlengang von Licht- und Elektronenmikroskopen (Gegenüberstellung)

weiter geöffneter Strahlenkegel $2\alpha_o$ von P aus in die erste Vergrößerungslinse, das Objektiv, eintritt. Infolge der bei dickeren und dichteren Objektstellen stärkeren Streuung gelangt von diesen nur ein Bruchteil der ursprünglichen Strahlen zur entsprechenden Stelle im Zwischenbild. Die stärker abgelenkten Elektronen werden teils durch die zwischen den Polschuhen des Objektivs angebrachte Blende aufgefangen, teils infolge der fehlerhaften Wirkung der Randzonen der Linse über eine größere Fläche des Bildes zerstreut. Auf diese Weise heben sich die Objektstellen verschiedener Dicke und Dichte durch unterschiedliche Helligkeit im Bilde voneinander ab. Das Zwischenbild wird durch die Projektionslinse weiter ver-

größert und schließlich als Endbild auf den Leuchtschirm oder eine Fotoplatte abgebildet. Bei Vergrößerungen von $V_1 \approx 160$ in der Objektstufe und $V_2 \approx 300$ in der Projektionsstufe resultiert beispielsweise eine rund 50 000fache Gesamtvergrößerung.
Ähnlich verläuft auch der Strahlengang im elektrischen Elektronenmikroskop, das sich in seinem Aufbau allerdings erheblich vom magnetischen unterscheidet.
Die Anwendung magnetischer Linsen bringt gegenüber den elektrischen Linsen eine Reihe von Vorteilen und Nachteilen mit sich.

Vorteile: Magnetische Linsen können außerhalb des evakuierten Geräteteiles angebracht und demzufolge leicht eingebaut oder ausgewechselt werden.
Mit starken Magnetfeldern können auch bei der Verwendung sehr schneller Elektronen (hohe Beschleunigungsspannung U_o) kurze Brennweiten f_m erzielt werden, da nach (652) die Brennweite von dünnen magnetischen Linsen mit $1/B^2$ abnimmt, während sie nur linear mit der Spannung U_o wächst. Bei der Verwendung elektrischer Linsen erzielt man kurze Brennweiten f_e nur mittels hoher Spannungen. Starke Magnetfelder sind aber leichter zu erzeugen und ungefährlicher in der Handhabung.
Nachteile: Der das Feld der magnetischen Linse erzeugende Strom muß sehr genau konstant gehalten werden, da schon geringe Feldschwankungen infolge des Quadrates von B in Gl. (652) die Brennweite f_m verändern und das Bild unscharf machen können. Bei elektrischen Linsen dann dagegen - wie oben bereits erwähnt - die Betriebsspannung in gewissen Grenzen schwanken, ohne daß die Schärfe des Bildes darunter leidet.

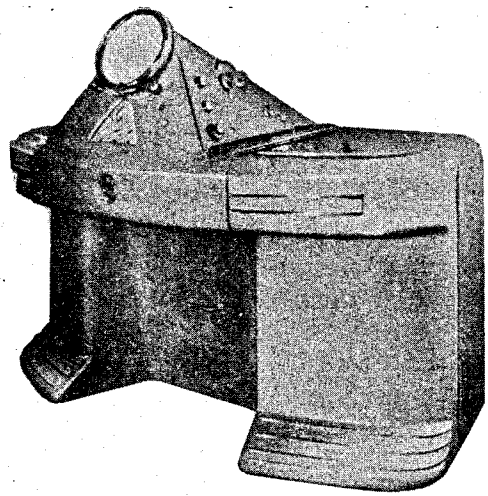

Bild 307
Das Philips Elektronenmikroskop für 100 kV

γ) Beispiele für die neueste Entwicklung von Elektronenmikroskopen: Bild 307 zeigt ein modernes Elektronenmikroskop für 100 kV mit magnetischen Linsen.

In Bild 308 ist neben dem Aufbauschema der Elektronenlinsen der Gang der Elektronenstrahlen in drei verschiedenen Fällen - starke Vergrößerung, schwache Vergrößerung, Beugungsuntersuchung - schematisch wiedergegeben.

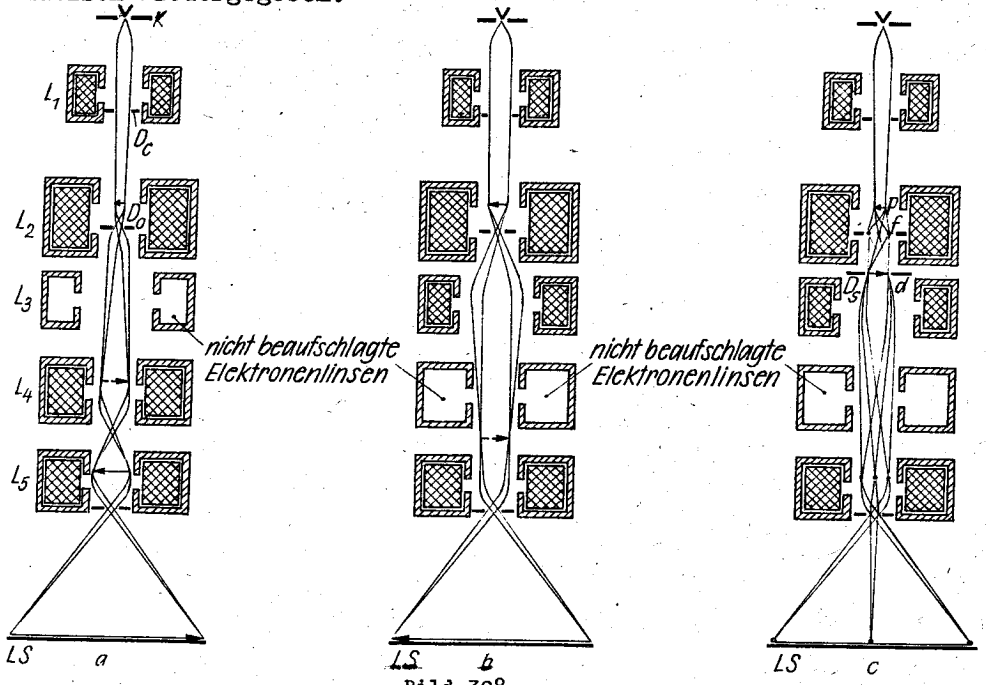

Bild 308

Aufbauschema der Elektronenlinsen und schematische Darstellung des Strahlenganges der Elektronen im Philips Elektronenmikroskop. Starke Vergrößerung 4000 bis 60 000fach (a). Schwache Vergrößerung 1000 bis 4000fach (b). Beugungsuntersuchung (c)

Einen Einblick in die Leistungsfähigkeit derartiger Elektronenmikroskope gibt die in Bild 309 gezeigte Aufnahme der Zellteilung von Coli-Bakterien. Elektronenmikroskope werden mit Vorzug in der Biologie, und da insbesondere bei der Virusforschung, verwendet. Den derzeitigen Höchststand in der Entwicklung von Elektronenmikroskopen hat das ebenfalls mit magnetischen Linsen arbeitende Siemens-Mikroskop erreicht. Dieses hat ein Auflösungsvermögen von d = 8 Å und gestattet eine etwa 160 000fache Vergrößerung.

Bild 309
Die Zellteilung einer Coli-Bakterie im Mikrogramm

[66] Elektronenbahnen in senkrecht kombinierten Feldern

1. Mathematische Darstellung der Bahnkurven: Wir legen die Feldvektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ gemäß Bild 310 in die negative y- bzw. z-Richtung eines rechtwinkligen Koordinatensystems und wählen die Richtung der Einschußgeschwindigkeit w_0 senkrecht zu der von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Ebene. Auf ein eingeschossenes Elektron wirkt die Lorentz-Kraft

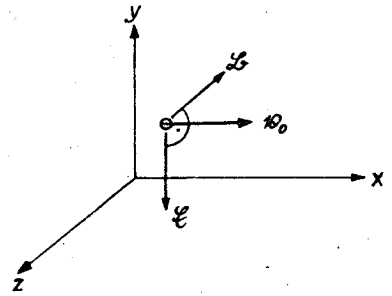

Bild 310
Lage der Feld- und Geschwindigkeitsvektoren im rechtwinkligen Koordinatensystem

$$\mathfrak{P} = m\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = -q\left[\mathfrak{E} + (\mathfrak{w}\times\mathfrak{B})\right] \qquad (655)$$

Infolge der oben getroffenen Festlegungen

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{j}E \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = -\mathfrak{k}B \quad (E,B>0)$$

hat das in (655) vorkommende Kreuzprodukt den Wert

$$\mathfrak{w}\times\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & -B \end{vmatrix} = -\mathfrak{i}v_yB + \mathfrak{j}v_xB \ ,$$

so daß in Komponentenform der Gesamtausdruck

$$m\frac{d}{dt}(\mathfrak{i}v_x + \mathfrak{j}v_y + \mathfrak{k}v_z) = \mathfrak{i}qv_yB + \mathfrak{j}q(E-v_xB)$$

resultiert. Der Vergleich der einzelnen Komponenten untereinander gibt die folgenden auf das Elektron wirkenden Ablenkkräfte in den jeweiligen Koordinatenrichtungen:

$$\left\{\begin{array}{l} P_x = m\dfrac{dv_x}{dt} = qv_yB \\ P_y = m\dfrac{dv_y}{dt} = qE - qv_xB \\ P_z = 0 \end{array}\right\} \qquad (656a,b,c)$$

Da keine Kraftkomponente in z-Richtung wirkt, bewegen sich die Elektronen also nur in der x,y-Ebene. Durch Differenzieren von (656b) ergibt sich wegen (656a) für die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung die Differentialgleichung

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \qquad (657a)$$

Für die x-Komponente der Geschwindigkeit folgt in gleicher Weise

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \left(v_x - \frac{E}{B}\right) \qquad (657b)$$

Zur Lösung der Gl. (657a) wählen wir den Ansatz

$$v_y = A \sin \omega (t - t_o) \qquad (658a)$$

Die zweimalige Ableitung nach t gibt den Ausdruck

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = -\omega^2 v_y$$

Der Vergleich mit Gl. (657a) ergibt:

$$\omega = \frac{qB}{m} \qquad (659)$$

Die Lösung v_x ergibt sich durch Ableiten und Einsetzen des obigen v_y-Wertes in Gl. (656b). Sie lautet

$$v_x = -A \cos \omega(t - t_o) + \frac{E}{B} \qquad (658b)$$

Die Konstanten A und t_o folgen aus den Anfangsbedingungen:
Der Eintritt des Elektrons in das Feld erfolge zum Zeitpunkt $t = t_o = 0$, für die Geschwindigkeitsanteile gelte zu dieser Zeit $v_y = 0$ und $v_x = v_o$.
Die Integrationskonstante A folgt dann aus (658b) zu

$$A = -v_o + \frac{E}{B}$$

Damit lautet die vollständige Lösung der Gleichungen (657a,b)

$$\left\{\begin{array}{l} v_y = -(v_o - \frac{E}{B}) \sin \omega t \\ v_x = (v_o - \frac{E}{B}) \cos \omega t + \frac{E}{B} \end{array}\right\} \qquad (660a,b)$$

Durch abermalige Integration dieser beiden Gleichungen erhalten wir die Bahnkurven der Elektronen in Parameterform:

$$\left\{\begin{array}{l} y(t) = +\frac{1}{\omega}(v_o - E/B) \cos \omega t + C_1 \\ x(t) = \frac{1}{\omega}(v_o - E/B) \sin \omega t + \frac{E}{B} t + C_2 \end{array}\right\} (661a,b)$$

Wählen wir zur Zeit $t = 0$ für x und y die Anfangswerte

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = R = \frac{mv_o}{qB} = \frac{v_o}{\omega} \,, \qquad 1)$$

so ergeben sich die Integrationskonstanten C_1 und C_2 zu

$$C_1 = \frac{1}{\omega}\frac{E}{B} \quad \text{und} \quad C_2 = 0$$

Die Bahnkurven lauten damit schließlich

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\omega}\left[(v_o - \frac{E}{B})\cos\omega t + \frac{E}{B}\right] \\ x(t) &= \frac{1}{\omega}\left[(v_o - \frac{E}{B})\sin\omega t + \frac{E}{B}\omega t\right] \end{aligned}\right\} \qquad (661a,b)$$

2. Diskussion der Bahnkurven: Durch die Gleichungen (661a,b) werden im allgemeinen Rollkurven (Zykloiden) beschrieben, deren Roll- oder Laufgeschwindigkeit (Translationsgeschwindigkeit in x-Richtung)

$$v_L = \frac{E}{B}$$

beträgt. Nur für den Fall, daß E = 0 und damit $v_L = 0$ wird, läuft das Elektron auf einer Kreisbahn, deren Parameterdarstellung aus (661a,b) folgt. Sie lautet

$$y(t) = \frac{y_o}{\omega}\cos\omega t$$

$$x(t) = \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t$$

Der Radius dieser Kreisbahn hat also den bekannten Wert

$$R = \frac{v_o}{\omega} = \frac{mv_o}{qB}$$

Die jeweilige Form der beschriebenen Zykloide hängt praktisch nur von der Amplitude der harmonischen Glieder cos ωt und sin ωt, also von

$$A = v_o - \frac{E}{B} = v_o - v_L$$

ab. Nehmen wir an, das Verhältnis E/B sei konstant und v_o werde geändert oder v_o sei konstant und E/B ändere sich, so ergeben sich folgende charakteristische Bahnkurven bzw. Kurvenbereiche:

a) $v_o = E/B$: Die Gleichungen (661a,b) lauten für diesen Fall

$$y(t) = \frac{1}{\omega}\frac{E}{B} = \text{konst.}$$

$$x(t) = \frac{E}{B}t = \text{konst.}\,t$$

1) Das ist der Krümmungsradius der magnetischen Ablenkung (vgl. 627a), wenn das Elektron mit der Geschwindigkeit v_o in das Magnetfeld (B) eingeschossen wird.

Das Elektron bewegt sich auf einer Geraden parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit $v_x = v_L$ (Bild 311, Kurve a), da sich die von den beiden Feldern E und B herrührenden Ablenkkräfte gerade gegenseitig aufheben.

b) $E/B < v_0 < 2\,E/B$: Innerhalb des angegebenen Bereiches bewegt sich das Elektron auf einer Wellenlinie mit überall endlicher Krümmung (gestreckte Zykloide). Kurve b (Bild 311) zeigt die Bahn des Elektrons für den Fall $v_0 = 1{,}5\,E/B$.

c) $v_0 = 2\,E/B$: Die Bahngleichungen (661a,b) lauten jetzt

$$y(t) = \frac{E/B}{\omega}\,(\cos \omega t + 1)$$

$$x(t) = \frac{E/B}{\omega}\,(\sin \omega t + \omega t)$$

Für $\omega t = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$, d.h. an den Stellen $x(t) = \pi\,\frac{E/B}{\omega}, 3\pi\,\frac{E/B}{\omega}$ wird $y(t) = 0$. Die Bahnkurven haben in diesem Fall die Form einer gespitzten Zykloide, wie sie in Bild 311 (Kurve c) dargestellt ist. Das Magnetfeld zwingt also das Elektron, gegen das elektrische Feld soweit anzulaufen, bis dieses gerade auf der x-Achse zum Stillstand kommt. Die gesamte kinetische Energie des Elektrons wird auf diesem Wege aufgebraucht, und es beginnt daher seine neue Bahn mit einer der y-Achse parallelen Tangente.

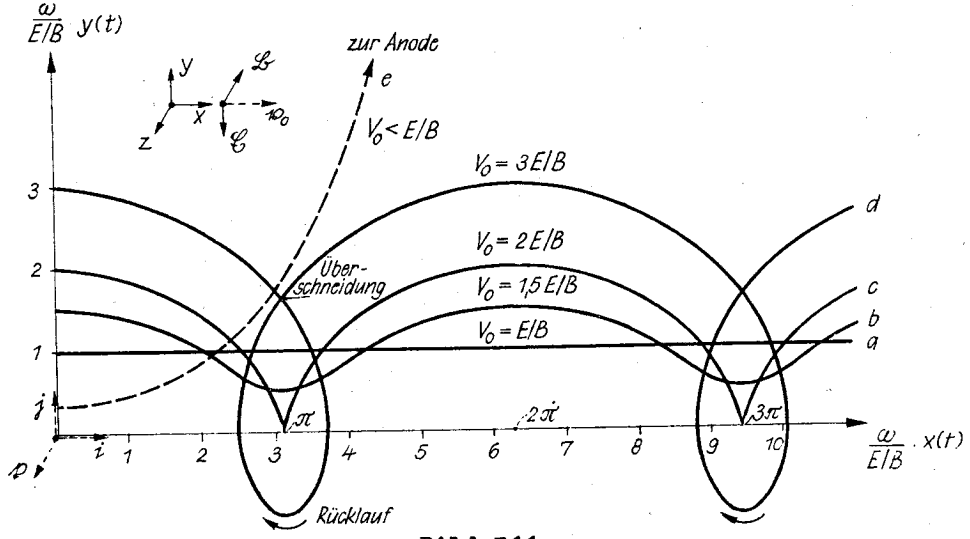

Bild 311
Bahnkurven von Elektronen in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern

d) $v_o > 2\ E/B$: Große kinetische Energie des eingeschossenen Elektrons oder - was im Prinzip dasselbe ist - hohe Induktion B des Magnetfeldes veranlassen das Elektron noch weiter als unter c) gegen das elektrische Feld anzulaufen. Infolge der durch die magnetische Ablenkung verursachten Änderung der Flugrichtung kommt das Elektron jedoch nicht zum Stillstand, vielmehr treten Überschneidungen und Rückläufe in der Bahnkurve auf (vgl. Bild 311, Kurve d). Das Elektron beschreibt in diesem Falle eine verschlungene Zykloide, wie sie in Bild 311 (Kurve d) beispielsweise für $v_o = 3\ E/B$ dargestellt ist.

e) $v_o < E/B$: Bei relativ kleinen Einschußgeschwindigkeiten v_o oder hohen Feldstärken E überwiegt die Kraftwirkung des elektrischen die des magnetischen Feldes. Das Elektron wird durch das elektrische Feld in Richtung Anode beschleunigt, wobei dessen Geschwindigkeit wächst und demgemäß die Bahnkrümmung abnimmt. Es bewegt sich also mit wachsender Geschwindigkeit auf die Anode zu (Bild 311, Kurve e). Ein ähnlicher Bahnverlauf ergibt sich auch dann, wenn der Vektor $\mathfrak{B}$ in die positive Richtung der z-Achse zeigt. In diesem Falle haben magnetische und elektrische Ablenkkraft gleiche Richtung, unterstützen sich also gegenseitig und lenken so das Elektron noch schneller zur Anode hin.

3. Technische Anwendungsmöglichkeiten: In allen oben betrachteten Fällen $v_o \geqq E/B$ konnten wir beobachten, daß die Leitbahn der Elektronenbewegung stets senkrecht zum elektrischen Feld gerichtet ist. Es folgt daraus eine für die praktische Anwendung außerordentlich wichtige Konsequenz:

> Die Leitbahn der Elektronenbewegung folgt der Niveaulinie des elektrischen Potentials.

Diese Gesetzmäßigkeit gilt streng in homogenen Feldern, mit Annäherung aber auch in nichthomogenen Feldern. Ein typisches Anwendungsbeispiel ist die geschlitzte Magnetfeldröhre. Die Trägerbahnen in einer solchen Röhre zeigt Bild 312, wobei der axiale Glühfaden das Potential 0 und die beiden Anodenhälften das Potential +50 V bzw. +150 V haben. Man erkennt, daß die Leitlinie des Rollkreises tatsächlich mit guter Näherung den Niveaulinien des elektrischen Potential folgt.

Hauptanwendung der Trägerbewegung in gekreuzten Feldern ist die Erzeugung von Schwingungen. Von Habann wurde folgende Methode

zur Schwingungserzeugung angegeben: Eine geschlitzte Röhre erhält zwei Anoden mit unterschiedlichem Potential (Bild 313). Die dadurch erreichte spezielle Form der Niveaulinien zieht den größten Teil der Elektronen zu der Anode hin, die das niedrigste Potential aufweist (in Bild 313, U_{A2} = 120 V). Der Elektronenstrom zur Anode 2 ist um so größer, je kleiner deren Potential gegen das der Anode 1 wird. Eine derartige Anordnung wirkt somit wie ein negativer Widerstand und kann als solcher zur Entdämpfung eines angeschlossenen Schwingungskreises verwendet werden.

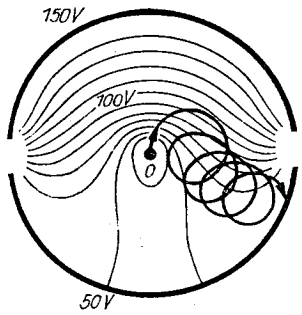

Bild 312
Elektronenbahnen in einer geschlitzten Magnetfeldröhre

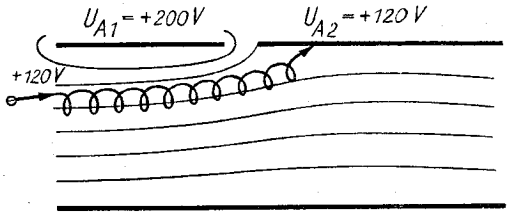

Bild 313
Erzeugung von Schwingungen nach Habann (vereinfachte Darstellung als ebenes Rohr)

Auf ähnlichen Prinzipien beruhen auch die später entwickelten Geräte zur Schwingungserzeugung, wie z.B. Mehrschlitzröhre oder Magnetron, auf deren Beschreibung wir hier verzichten wollen.

[67] Elektronenbewegung in Raumladungsfeldern

1. Grundsätzliches: Jeder durch Elektronen (oder auch Ionen) getragene Strom ist ein Konvektionsstrom und besitzt daher im allgemeinen eine Raumladung. Nur im Falle der Gleichheit beider Trägerdichten wird die Raumladung zu 0 kompensiert. Bei allen unseren bisherigen Betrachtungen, insbesondere in der Elektronenoptik, ließen sich die Raumladungen infolge der nur geringen Stromstärken und der hohen Spannungen in ihrer Wirkung vernachlässigen. Diese Vereinfachung ist überall dort nicht mehr möglich, wo die Stromstärken ansteigen und die Spannungen relativ niedrig sind. Insbesondere spielen Raumladungen eine bedeutende Rolle bei Elektronenröhren (Verstärkerröhren), mit denen wir uns

auf Grund ihrer vielseitigen Anwendung etwas eingehender beschäftigen werden.

2. Das Raumladungsgesetz: Raumladungen rufen elektrische Potentialfelder hervor, die der Poissonschen Gleichung

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_o} \tag{662}$$

und den zugehörigen Randbedingungen (Elektrodenpotentiale) genügen müssen. Allgemein gilt für die Stromdichte

$$\mathcal{J} = \varrho \cdot \mathcal{v} \tag{663a}$$

Daraus folgt für die Raumladungsdichte ϱ im Falle eines von Elektronen getragenen Stromes

$$\varrho = -\frac{G}{v} \tag{663b}$$

Für den Betrag der Strömungsgeschwindigkeit $\mathcal{v}$ läßt sich gemäß (623a) schreiben

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}}\ \sqrt{\varphi}$$

Damit wird aus (662)

$$\Delta\varphi = \frac{G}{\varepsilon_o}\sqrt{\frac{m}{2q}}\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \tag{664}$$

Die gegenseitige Kopplung von Raumladung, Feldverlauf und Stromdichte ermöglicht die exakte Lösung dieser Gleichung nur in den einfachsten Fällen, wie z.B. im Fall des ursprünglich homogenen elektrischen Feldes. Dort ist das Potential φ nur noch von einer Koordinate - wir nennen sie x - abhängig, so daß aus der partiellen Differentialgleichung (664) die totale Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{G}{\varepsilon_o}\sqrt{\frac{m}{2q}}\frac{1}{\sqrt{\varphi}} \tag{665}$$

wird. Verwenden wir den Lösungsansatz

$$\varphi(x) = K\,x^n \qquad (n > 0), \tag{666}$$

so folgt durch Differentiation und Einsetzen in (665)

$$K\,n(n-1)\,x^{n-2} = \frac{G}{\varepsilon_o}\sqrt{\frac{m}{2q}}\,K^{-1/2}x^{-n/2}$$

Soll diese Gleichung für jeden Wert von x erfüllt sein (z.B. auch für x = 1), so müssen sowohl die Koeffizienten wie auch die

Exponenten von x auf beiden Seiten einander gleich sein. Diese Bedingung gibt sofort

$$n-2 = -n/2 ,$$

und es folgt

$$n = 4/3$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$K\, n(n-1) = \frac{G}{\varepsilon_o} \sqrt{\frac{m}{2q}}\, K^{-1/2}$$

und damit

$$K^{3/2} = \frac{G}{n(n-1)\,\varepsilon_o} \sqrt{\frac{m}{2q}} = \frac{9}{4} \frac{G}{\varepsilon_o} \sqrt{\frac{m}{2q}}$$

Aus den Randbedingungen bestimmt sich K wie folgt. Gilt an der Katode $x = 0$, $\varphi = 0$ und an der Anode $x = d$, $\varphi = U_a$, so ist die erste Bedingung durch den Lösungsansatz von selbst und die zweite wegen (666) durch

$$K = \frac{U_a}{d^{4/3}}$$

erfüllt. Damit erhalten wir aber

$$G = \frac{4\varepsilon_o}{9} \sqrt{\frac{2q}{m}}\, \frac{U_a^{3/2}}{d^2} \qquad (667a)$$

Diese Gleichung beschreibt die Raumladungs-Kennlinie einer Elektronenröhre mit ebenen Elektroden und wird oft auch als das $U^{3/2}$-Gesetz bezeichnet. Setzen wir für ε_o, q und m die bekannten Werte ein, so lautet (667a)

$$G = 2{,}33 \cdot 10^{-6}\, \frac{U_a^{3/2}}{d^2} \qquad (667b)$$

Hierbei hat G die Dimension $\left[A/m^2\right]$, wenn d in $\left[m\right]$ und U_a in $\left[V\right]$ gemessen wird. Bei einer Anodenspannung von $U_a = 100$ V und einem Elektrodenabstand von $d = 1$ cm läßt sich also beispielsweise eine Stromdichte von $G = 2{,}33$ mA/cm^2 erreichen.
Das $U^{3/2}$-Gesetz gilt außer für ebene, auch für zylindrische oder sphärische und im allgemeinen für beliebig gestaltete Elektroden. Allerdings ist dann die Abhängigkeit der Stromdichte vom Elektrodenabstand weitaus komplizierter als in (667).
Die typische $U^{3/2}$-Abhängigkeit des Stromes von der Spannung läßt sich für beliebige Elektrodenformen wie folgt nachweisen: Wir

schreiben Gl. (664) in der Form

$$G = C \sqrt{\varphi}\ \Delta\varphi \qquad (668)$$

und führen anstelle von φ das auf das Anodenpotential U_a bezogene reduzierte Potential

$$\psi(xyz) = \frac{\varphi(xyz)}{U_a}$$

ein. Hieraus ergeben sich für die in (668) vorkommenden Faktoren die Ausdrücke

$$\sqrt{\varphi} = \sqrt{\psi}\ U_a^{1/2} \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = \Delta\psi U_a ,$$

womit sich die Stromdichte G auf die Form

$$G = C\sqrt{\psi}\,\Delta\psi\ U_a^{3/2}$$

bringen läßt. Eine Änderung von U_a hat nun keinen Einfluß mehr auf die reduzierten Größen $\psi(xyz)$, da sich das Potential überall um den gleichen Faktor wie U_a ändert. Die Stromdichte bleibt folglich proportional zu $U_a^{3/2}$, d.h., die Geometrie der Elektronenbahnen bleibt unverändert, sie werden nur mit einer anderen Geschwindigkeit durchlaufen.

3. Die Potentialverhältnisse: Aus (666) folgt für den Potentialverlauf zwischen ebenen Elektroden

$$\varphi(x) = \frac{U_a}{d^{4/3}}\ x^{4/3} \qquad (669a)$$

Danach ist also die Feldstärke an der Katode (x=0)

$$E_k = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

Das heißt, alle von der Anode ausgehenden Kraftlinien $\mathscr{E}$ enden an den Raumladungen (vgl. Bild 314). Bei Glühkatoden hat dies eine Stauung der Elektronen unmittelbar vor der Katode zur Folge, da zunächst keine Abwanderung zur Anode erfolgen kann. Die vor der Katode gestauten Elektronen rufen auf der Katode positive Influenzladungen hervor und senken so das Potential in unmittelbarer Katodennähe um einen Betrag $\delta\varphi$

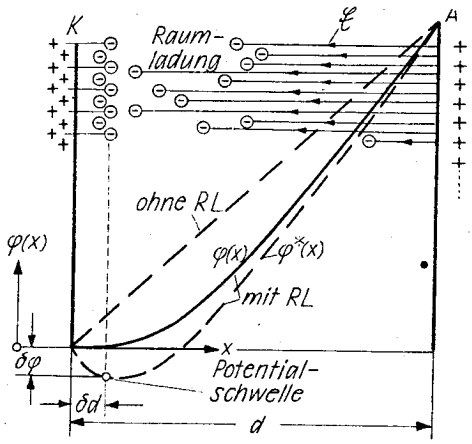

Bild 314
Einfluß der Raumladung auf den Potentialverlauf zwischen einer ebenen Glühkatode und einer ebenen Anode

(Bild 314). Es gelangen deshalb nur die Elektronen zur Anode, die vermöge ihrer Energie gegen dieses Potential anlaufen können. Die übrigen kehren vor der Potentialschwelle um und fliegen zur Katode zurück. Der Potentialverlauf

$$\varphi(x) \sim x^{4/3}$$

gilt folglich nur im Raum zwischen Potentialschwelle (virtuelle Katode) und Anode. Die Anwendung der Raumladungsformel verlangt also eine Verringerung des Elektronenabstandes um δd und eine Erhöhung der effektiven Anodenspannung um $\delta\varphi$, wenn $\delta\varphi$ die Höhe der Potentialschwelle bedeutet. Gl. (669a) lautet damit

$$\varphi(x) + \delta\varphi = \frac{U_a - \delta\varphi}{(d - \delta d)^{4/3}} (x - \delta d)^{4/3} \qquad (669b)$$

Entsprechend erhöht sich die Stromdichte G nach (667) auf

$$G = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{(U_a+\delta\varphi)^{3/2}}{(d-\delta d)^2} \qquad (667c)$$

Ohne diese Korrektur kann mit einer strengen Gültigkeit des $U^{3/2}$- Gesetzes nicht gerechnet werden. Darüber hinaus wird ferner eine gleichmäßige Verteilung des Emissionsstromes über die gesamte Katodenfläche gefordert. Diese Forderung ist bei Elektronenröhren nicht immer erfüllt, da speziell bei Verstärkerröhren durch das Steuergitter vor der Katode gewisse Teile der Emissionsfläche abgeschirmt werden. Auf die Gültigkeit des $U^{3/2}$-Gesetzes in derartigen Fällen werden wir im folgenden kurz eingehen [1].

4. Die Raumladung in Verstärkerröhren:

a) Die Wirkung des Steuergitters: Das Feld vor der Katode von Dreipolröhren wird durch die Wirkung des Gitters und der Anode bestimmt. Der zur Anode gelangende Elektronenstrom ist also abhängig von der Gitterspannung einerseits und der Anodenspannung anderseits, und zwar resultiert in der Gitterebene eine sogenannte Steuerspannung

$$U_{St} = \lambda U_g + D U_a \qquad (670)$$

D stellt den Durchgriff der Anodenspannung U_a dar, der bei Trioden Werte zwischen 2 % und 30 % annehmen kann. Der Faktor λ berücksichtigt die Tatsache, daß infolge der Lücken im Gitter nicht das volle

1) Ausführlichere Betrachtungen bringt die Lehrbriefreihe Elektronenröhren.

Potential U_g in der Gitterebene wirksam ist. Allerdings ist bei Verstärkerröhren der Faktor λ nur unbedeutend kleiner als 1, so daß er oft gar nicht eingeführt zu werden braucht. Mit der Steuerspannung (670) wird der zur Anode gelangende Elektronenstrom

$$J_a = k_g(\lambda U_g + DU_a + \delta\varphi)^{3/2} \qquad (671)$$

Dabei hat die Konstante k_g den Wert

$$k_g = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{F}{(d-\delta d)} \left[\frac{A}{V^{3/2}}\right],$$

wenn F die emittierende Katodenfläche bedeutet.
Je nachdem, ob das Gitter negativ oder positiv vorgespannt ist (wobei aber noch $U_{St} > 0$ sein soll), wird das Feld an der Katodenoberfläche vor den Gitterdrähten verstärkt oder abgeschirmt. Da das Gitter meistens negativ vorgespannt ist, ergibt sich zwangsweise an der Katodenoberfläche ein periodischer Verlauf der Feldstärke (vgl. Bild 315). Besonders ausgeprägt ist diese Erscheinung bei Röhren mit großer Kennlinien-Steilheit, bei denen der Abstand Gitter - Katode in der Größenordnung der Maschenweite des Gitters liegt. In diesen Fällen nehmen die im Schatten der Gitterdrähte liegenden Teile der Katodenoberfläche sogar negative Feldstärken an (Bild 315, gestrichelt) und führen zu Inselbildungen auf der Emissionsfläche. Während an diesen Stellen die Elektronen erst gegen das negative Feld anlaufen müssen, kann dicht daneben unter Umständen schon der volle Sättigungsstrom fließen. Das $U^{3/2}$-Gesetz (667) gilt integral dann nur noch in ganz grober Näherung.

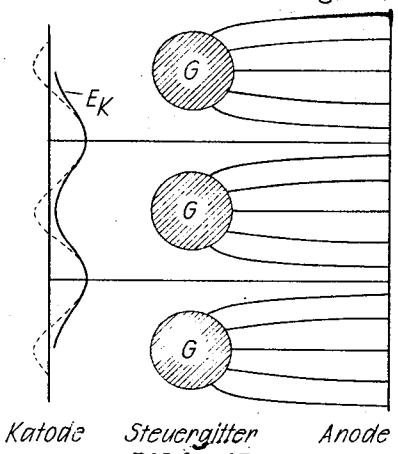

Bild 315
Feldverlauf an der Katodenoberfläche einer ebenen Triode bei negativ vorgespanntem Gitter

Auf die zur Festlegung der Verstärkereigenschaften eingeführten Begriffe Durchgriff, Steilheit und innerer Widerstand gehen wir an dieser Stelle nicht ein, da sich daraus keine grundsätzlich neuen

Zusammenhänge mit der Theorie der Elektronenbewegung ergeben [1].

b) Die Wirkung eines Raumladungsgitters: Eine besonders hohe Steilheit der Stromspannungskennlinie von Elektronenröhren läßt sich erreichen, wenn der Anlaufstrom unmittelbar in den Sättigungsstrom übergeht, wie das z.B. bei niedrigen Temperaturen der Glühkatode der Fall ist (Bild 316, Kurve a). Zwischen Strom und Spannung besteht dann die früher schon angegebene Beziehung (597)

$$J = J_s \, e^{-qU/kT} ,$$

woraus für die Steilheit S des Anlaufstromes folgt

$$S = \frac{\partial J}{\partial U} = J_s \, \frac{|q|}{kT} \, e^{-qU/kT}$$

Der für U = 0 maximal erreichbare Wert wird also

$$S_{max} = J_s \, \frac{|q|}{kT}$$

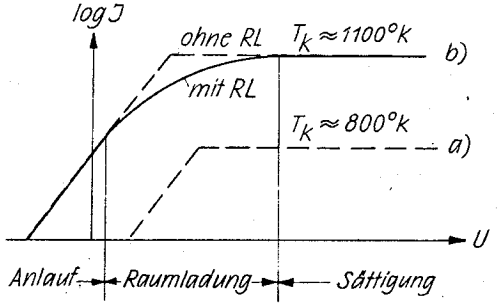

Bild 316
Stromspannungskennlinien einer Elektronenröhre bei verschiedenen Katodentemperaturen T_K (für Dioden gilt $U = U_a$, für Trioden $U = U_{St}$)

Für Oxydkatoden mit $T_k = 1000°K$ würde demnach

$$S_{max} = 10 \, J_s \, [V^{-1}]$$

Ändert man also die Spannung U um 1 V, so müßte in diesem Falle der Strom auf das 10fache des Sättigungsstromes J_s ansteigen. Daß derartig hohe Werte tatsächlich niemals erreicht werden, liegt nun daran, daß sich bei höheren Katodentemperaturen Raumladungen bemerkbar machen, die einen stetig verlaufenden Übergang zwischen Anlauf- und Sättigungsgebiet schaffen (Bild 316, Kurve b). Man hat deshalb versucht, die strombegrenzende Wirkung der Raumladung durch Einbau eines Raumladungsgitters abzuschwächen, das dicht vor der Katode liegt und eine hohe positive Spannung erhält. Durch dieses Gitter werden die Elektronen kräftig beschleunigt (Beschleunigungsgitter), nach Durchgang durch die Gitteröffnungen jedoch wieder abgebremst, weil sie dann in das negative Feld zwischen Raumladegitter B und Steuergitter G (vgl. Bild 317) gelangen. Die bei der Dreielektrodenröhre vor der Katode liegende

1) Die genannten Begriffe werden anschaulich erläutert im 1. Lehrbrief, Elektronenröhren.

Elektronenwolke wird also bei der Vierelektrodenröhre in die Ebene des Steuergitters G verlagert. Entsprechend verschiebt sich natürlich auch die damit verbundene Potentialschwelle an das Steuergitter. Dieses Gitter wirkt jetzt also wie eine „kalt emittierende" Katode, so daß der <u>gesteuerte Strom nicht mehr durch Raumladungen begrenzt</u> wird. Man erhält aber trotzdem nicht die reine Anlaufkennlinie, da auch hier wieder bestimmte Erscheinungen - insbesondere Ablenk- und Abfangeffekt - für eine Verschlechterung der Steilheit sorgen.

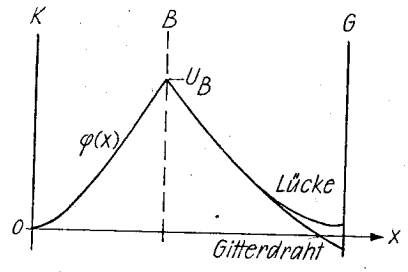

Bild 317
Potentialverlauf zwischen Katode und Steuergitter bei der Einfügung eines Raumladegitters B

c) <u>Der Ablenkeffekt:</u> Alle durch die Gitterdrähte des Raumlade- oder Beschleunigungsgitters hindurchfliegenden Elektronen unterliegen den Coulombschen Anziehungsgesetzen, so daß ihre Bahnen entsprechend dem Abstand von diesen Drähten mehr oder weniger stark abgelenkt werden. Lediglich die in der Mitte zwischen zwei Drähten hindurchgehenden Elektronenstrahlen werden aus Symmetriegründen nicht abgelenkt, da sich in diesem Falle die Anziehungskräfte gerade aufheben (Bild 318). Alle anderen Strahlen büßen infolge der Ablenkung an Geschwindigkeit in Richtung des Steuergitters ein. Dies hat zur Folge, daß ein Teil der Elektronen nicht mehr bis zum Steuergitter anlaufen kann, sondern schon vorher zur Umkehr gezwungen wird (vgl. Bild 318). Dieser von der Steuerspannung U_{St} abhängige Stromanteil geht daher für den Anodenstrom verloren und verringert entsprechend die Steilheit der Kennlinie. Der volle Sättigungsstrom fließt erst dann, wenn die Steuerspannung soweit angestiegen ist, daß alle Elektronen das Steuergitter erreichen.

d) <u>Der Abfangeffekt:</u> Ein Teil der von der Katode abgesaugten Elektronen prallt naturgemäß direkt auf die Drähte des Gitters B auf und geht auf diese Weise verloren. Diese abgefangenen Elektronen (Bild 318, gestrichelt) vermindern den Anodenstrom und damit die Steilheit der Kennlinie ebenfalls. Mit steigender Steuerspannung verringern sich jedoch auch diese Verluste, so daß schließlich wieder der Sättigungsstrom asymptotisch erreicht wird.

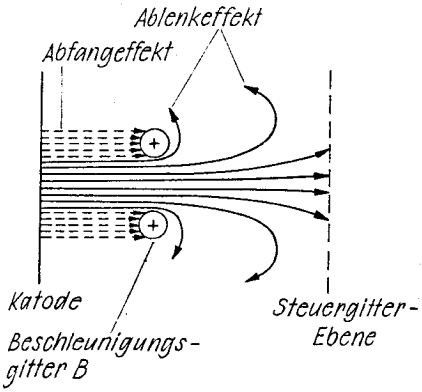

Bild 318
Elektronenbahnen am Raumladegitter

Nachsatz: Die Einführung weiterer Gitter, wie z.B. Schirmgitter oder Bremsgitter, bietet hinsichtlich der Elektronenbewegung in Raumladungsfeldern nichts Neues, so daß wir auf eine Besprechung verzichten, zumal Aufbau und Wirkungsweise dieser Gitter wieder ausführlich in der Lehrbriefreihe Elektronenröhren behandelt werden.

[68] Elektronenbewegung in zeitlich veränderlichen Feldern:

1. Laufzeiterscheinungen: Die Bewegung eines Elektrons in Wechselfeldern nicht zu hoher Frequenz erfolgt praktisch trägheitslos, da sich die Feldgrößen während der sehr kurzen Laufzeit des Elektrons nicht oder nur geringfügig ändern. So durchfliegt beispielsweise ein auf 10 Volt beschleunigtes Elektron die Strecke von 1 cm in rund $5 \cdot 10^{-3}$ μs. In dieser Zeit ändert sich ein auf das Elektron wirkendes elektrisches Wechselfeld, das mit 10 MHz (30 m Wellenlänge) schwingt, nicht viel, so daß die Veränderung der Bahngeometrie und der Bahngeschwindigkeit mit der Feldänderung noch praktisch trägheitslos Schritt hält.
Bei höheren Frequenzen [1] dagegen darf die Trägheit des Elektrons nicht mehr vernachlässigt werden, da sie zu charakteristischen Erscheinungen, den sogenannten Laufzeiteffekten, führt. Während wir also im stationären Fall die Laufzeit des Elektrons von einer zur andern Elektrode noch vernachlässigen konnten, muß bei Wechselfeldern hoher Frequenz mit endlichen Werten der Laufzeit gerechnet werden. Diese endliche Laufzeit hat zwei bedeutende Auswirkungen:

a) Die Gestaltung der Elektronenbahnen wird eine andere als im stationären Fall.
b) Die kinetische Energie des Elektrons ist nicht mehr eindeutig

1) Für Elektronenröhren oberhalb 10^7 Hz bis 10^8 Hz

mit dem Ortspotential seines jeweiligen Standpunktes verknüpft.

Zur Erläuterung von a) betrachten wir ein einfaches Beispiel. In einen Plattenkondensator (Bild 319a) möge ein Elektron mit der Geschwindigkeit v_0 schräg eintreten. An den Platten liege eine Wechselspannung der Periodendauer T. Die Feldstärke im Kondensator rechnen wir positiv, wenn sie auf das Elektron bremsend wirkt. Tritt das Elektron zur Zeit des positiven Scheitelwertes t = 0 in das Wechselfeld ein, so beschreibt es bei einer gegen die Periodendauer T zu vernachlässigenden Laufzeit die übliche Wurfparabel (Bahn 2 in Bild 319a), da sich $\hat{\mathcal{E}}$ während der Zeit τ nicht merklich ändert. Ist τ dagegen von derselben Größenordnung wie T, so läßt die Bremswirkung infolge abnehmender Feldstärke nach und es entsteht z.B. die Bahn 3. Nach einer Viertelperiode (T/4) wechselt das Feld seine Richtung und wirkt nun beschleunigend, so daß die Bahnkrümmung ebenfalls das Vorzeichen wechselt. Beim Nulldurchgang des Wechselfeldes hat die Bahn daher einen Wendepunkt (W_1). Während der negativen Halbperiode wird die Bahn zurückgekrümmt, durchläuft beim Nulldurchgang 3/4 T abermals einen Wendepunkt (W_2) und erreicht bei Vollendung der Periode wieder die Anfangsrichtung 1. Bei noch höherer Frequenz würde sich unter sonst gleichen Bedingungen die Bahn 4 in Bild 319a ergeben. Der zugehörige zeitliche Verlauf der Feldstärke ist in Bild 319b dargestellt. Wir sehen also, daß von einer Parabelbewegung nicht mehr die Rede sein kann. Vielmehr schwankt

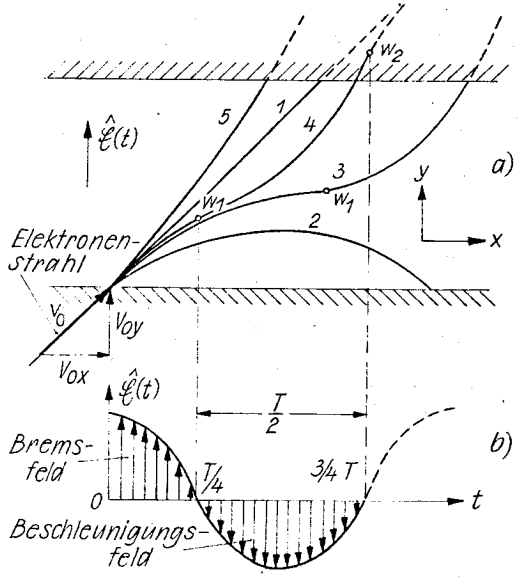

Bild 319
Zur Laufzeiterscheinung im homogenen elektrischen Wechselfeld
Trägerbahnen bei verschiedener Laufzeit (a). Zu Bahn 4 gehöriger Verlauf des Wechselfeldes (b).

die Bahnrichtung im Takte des Wechselfeldes um die Anfangsrichtung.

An diesem Beispiel können wir ein für alle Laufzeiterscheinungen charakteristisches Merkmal feststellen:

> Mit steigender Frequenz werden die Abweichungen der Elektronenbahnen von der Anfangsrichtung 1 immer geringer. Für $\tau \gg T$ verschwindet die Wirkung des Feldes praktisch ganz.

Das soeben betrachtet Verhalten der Elektronenbewegung läßt sich analytisch wie folgt darstellen: Zerlegen wir die Elektronengeschwindigkeit v in die beiden Komponenten v_y und v_x, so ändert sich unter dem Einfluß eines Wechselfeldes $E_o \sin \omega t$ nur die Komponente in y-Richtung. Es gelten also für das Elektron (-q) die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} P_y &= m\,\dot{v}_y = -q\,E_o \sin \omega t \\ P_x &= m\,\dot{v}_x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (672a,b)$$

Durch Integrieren von (672b) erhält man sofort

$$v_x = \text{konst.} = v_{ox}$$

v_{ox} und v_{oy} sind die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit v_o (vgl. Bild 319). Die Integration von (672a) gibt

$$v_y = \frac{q\,E_o}{m\omega} \cos \omega t + A_1 \qquad (673)$$

Eine zweite Integration führt zu

$$y = \frac{q\,E_o}{m\omega^2} \sin \omega t + A_1 t + A_2 \qquad (674)$$

Tritt das Elektron zur Phasenlage ωt_o in das Wechselfeld ein (Bild 320), d.h., die v_y-Komponente würde zur Zeit $t = t_o$ den Wert $v_y = v_{oy}$ haben, so ergibt sich mit (673) die Konstante

$$A_1 = v_{oy} - \frac{q\,E_o}{m\omega} \cos \omega t_o$$

Die Konstante A_2 berechnet sich mit der Anfangsbedingung $t = t_o : y = 0$ und Gl. (674) zu

$$A_2 = v_{oy} t_o - \frac{q\,E_o}{m\omega^2} (\sin \omega t_o - t_o \cos \omega t_o)$$

Sie bezieht sich nur auf die Wahl des Koordinatenanfangspunktes und kann im allgemeinen vernachlässigt werden. Die vollständige Lösung von (672) lautet dann

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\gamma_0}{\omega^2} \sin \omega t + (v_{oy} - \frac{\gamma_0}{\omega} \cos \omega t_o)t \\ x = v_{ox} t \ , \end{array} \right\} \ , \qquad (675a,b)$$

wobei

$$\frac{q\, E_o}{m} = \gamma_0$$

gesetzt ist. Es zeigt sich, daß bei wachsenden Frequenzen ω die periodischen Glieder in (675a) gegen Null gehen, so daß im Grenzfall $\omega \longrightarrow \infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = v_{oy}\ t \\ x = v_{ox}\ t \end{array} \right\}$$

wird. Das Elektron würde also nach dem Eintritt in ein zeitlich unendlich rasch veränderliches Feld mit der Anfangsgeschwindigkeit v_o in Anfangsrichtung ungehindert weiterfliegen. Es verhält sich mithin genauso, als wenn das Feld überhaupt nicht vorhanden wäre, wie wir schon oben durch eine einfache Überlegung festgestellt hatten.

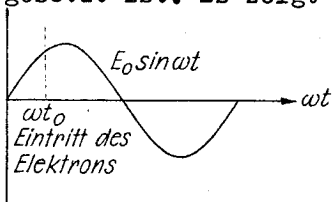

Bild 320

Zur Erläuterung der Laufzeiterscheinung b) mögen folgende Betrachtungen dienen: Die energetischen Verhältnisse sind im langsam veränderlichen Feld dadurch gekennzeichnet, daß die Bewegungsenergie des Elektrons in jedem Punkte eindeutig gegeben ist durch das dort herrschende Potential φ. Im schnell veränderlichen Feld trifft das nicht mehr zu, wie aus folgendem erhellt. Die untere Platte des Kondensators besitze das feste Potential φ_o. Entsprechend wird die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons

$$v_o = \sqrt{\frac{2q}{m}}\ \sqrt{\varphi_o}$$

Das Elektron möge wieder zur Zeit des positiven Scheitelwertes in das Wechselfeld eintreten, wobei das Verhältnis

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\text{Laufzeit}}{\text{Periodendauer}} = p \qquad (676)$$

gerade so bemessen sein soll, daß das Elektron beim Nulldurchgang des schwingenden Feldes die obere Platte des Kondensators erreicht. In diesem Augenblick ist seine Geschwindigkeit ersichtlich kleiner als v_o, obwohl das Potential der oberen Platte infolge $\hat{\mathcal{E}} = 0$

gleich dem der unteren Platte ist. Das Elektron hat daher einen Teil seiner Energie an das Wechselfeld abgegeben, denn es wurde während seines Fluges dauernd gebremst. Seine Energie ist also deutlich kleiner, als dem Ortspotential entspricht.
Umgekehrt wird ein Elektron, das bei negativem Scheitelwert einfliegt, dauernd beschleunigt, also Energie aus dem Felde aufnehmen und daher an der oberen Platte mit einer höheren Energie ankommen, als sie dem Plattenpotential zur Zeit der Ankunft entspricht. Für Elektronen mit anderen Eintrittsphasen ergeben sich hinsichtlich des Energieaustausches Werte zwischen den eben betrachteten Grenzfällen.
Soll nun eine Dämpfung oder Entdämpfung des Wechselstromkreises erfolgen, so muß die Energieübertragung in der einen oder anderen Richtung im Mittel einen Überschuß aufweisen. Dies ist im allgemeinen der Fall. Wird beispielsweise die Laufzeit des Elektrons ein Viertel der Periodendauer ($\tau/T = 1/4$), so hat die Bahn eines bei positivem Scheitelwert von $\mathscr{E}$ eintretenden Elektrons ihren Wendepunkt gerade auf der oberen Platte, da diese ja nach der Zeit T/4 erreicht wird. Ein Elektron, das bei negativem Scheitelwert in das Feld eintritt und etwa die Bahn 5 in Bild 319a beschreibt, wird dagegen dauernd beschleunigt und erreicht die obere Platte schon vor Ablauf der Viertelperiode. Es nimmt daher weniger Energie auf, als das vorher betrachtete Elektron an das Feld abgegeben hat. Ähnliches gilt für Elektronen, die zu anderen, um je eine Viertelperiode verschobenen Zeitpunkten in das Feld eintreten. Im Mittel wird also Energie an das Wechselfeld abgegeben. Natürlich kann bei anderen Werten von τ/T auch der umgekehrte Fall eintreten.
2. Die Messung von rasch veränderlichen Vorgängen mit der Braunschen Röhre: Verwendet man die Braunsche Röhre zur Messung rasch veränderlicher Vorgänge, so können die Ergebnisse stark verfälscht werden, wenn die Frequenz so hoch ist, daß die Schwingungsdauer T mit der Laufzeit τ der Elektronen zwischen den Ablenkplatten vergleichbar wird. Die Gestalt der Elektronenbahn im hochfrequenten Ablenkfeld ist dann wesentlich von der Phasenlage t_o der Plattenspannung bei Eintritt des Elektrons und vom Verhältnis p der Laufzeitdauer zu Periodendauer (676) abhängig. Wir verzichten auf eine genauere Analyse der Elektronenbahnen,

die im übrigen keine grundsätzlich neuen Gesichtspunkte bietet und nach dem oben gegebenen Schema auch für die hier vorliegende Querablenkung durchgeführt werden kann. In Bild 321 sind einige

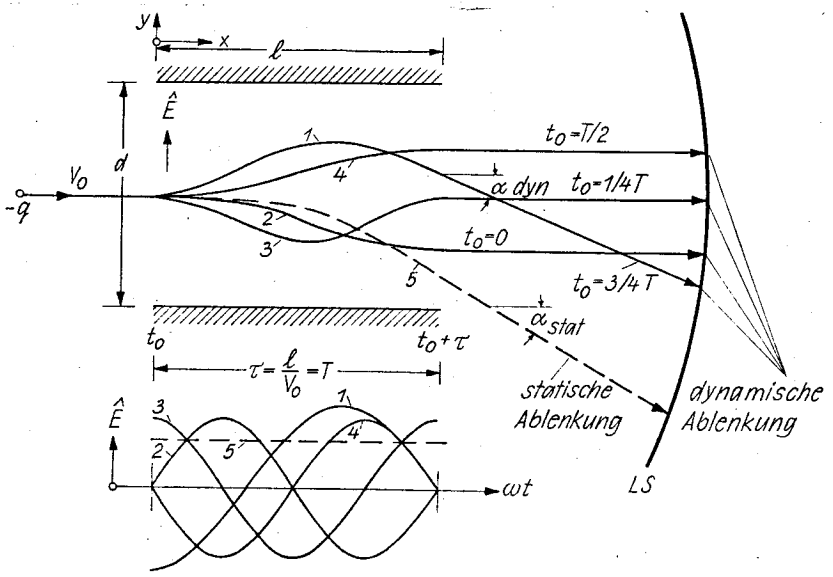

Bild 321
Trägerbahnen im hochfrequenten Ablenkfeld einer Braunschen Röhre für $p = \tau/T = 1$

berechnete Elektronenbahnen aufgezeichnet, und zwar für stets den gleichen p-Wert ($p = 1$), jedoch verschiedene Eintrittsphasen t_o, die an den Kurven jeweils verzeichnet sind. Man sieht daraus beispielsweise, daß die der Eintrittsphase T/4 zukommende Bahn überhaupt keine Ablenkung erfährt oder daß ferner die Bahn mit $t_o = T/2$ parallel mit sich versetzt wird, was in der Praxis nur eine vernachlässigbare Verschiebung des Fluoreszenzfleckes bedeutet. Die gestrichelt eingezeichnete statische Ablenkung, die dem Effektivwert der Ablenkspannung entspricht, ist stets größer als die dynamische.

3. Laufzeiterscheinungen in Verstärkerröhren (Längssteuerung): Während wir oben den Einfluß von hochfrequenten Feldern auf die Elektronenbewegung senkrecht zur Flugbahn, die sogenannte Quersteuerung, betrachteten, spielt bei Verstärkerröhren die Beeinflussung in Richtung der Flugbahn, die sogenannte Längssteuerung, eine

besondere Rolle. Insbesondere treten in Verstärkerröhren bei nicht mehr vernachlässigbarer Laufzeit zwei Effekte gütemindernd in Erscheinung:

a) Leistungsverlust durch Stromaufnahme des Gitters,
b) Absinken des Verstärkungsfaktors infolge verzerrter Stromspannungskennlinie.

Zu a) Nähert sich eine Anzahl von der Katode ausgehender Elektronen dem Steuergitter, so wird in der Gitterzuleitung ein Strom induziert, der entsprechend [61] 1. in Richtung Gitter fließt. Nach Passieren des negativ vorgespannten Gitters entfernt sich bei niedrigen Frequenzen die gleiche Zahl von Elektronen wieder, so daß im Gitterkreis ein gleichgroßer Strom in entgegengesetzter Richtung induziert wird. Insgesamt hat also das Gitter keinen Strom aufgenommen. Bei sehr hohen Frequenzen ändert sich dagegen die Gitterspannung bereits während der Laufzeit der Elektronen von der Katode zum Gitter. Hat die Gitterspannung während des Fluges der Elektronen von der Katode zum Gitter z.B. ihre positive Halbwelle, so werden mehr Elektronen auf das Gitter zu- als von ihm wegfliegen. Als Folge nimmt das Gitter einen Strom auf, der von der Gitterspannungsquelle zum Gitter fließt. Dieser positive Gitterstrom gibt multipliziert mit dem positiven Gitterspannungswert einen Gitter-Leistungsverlust, der die Wirksamkeit der Röhre bald in Frage stellt. Dasselbe gilt auch,wenn während des Elektronenfluges von der Katode zum Gitter die negative Halbwelle der Gitterwechselspannung wirksam ist. Der Strom kehrt dann ebenfalls seine Richtung um, da sich jetzt die größere Elektronendichte in den Raum zwischen Gitter und Anode verlagert. Ein Gitterstrom wirkt mithin immer so, als wäre zwischen Gitter und Katode ein Widerstand geschaltet, dessen Größe, wie die genauere Rechnung zeigt, dem Quadrate der Frequenz umgekehrt proportional ist.
Zu b) Dem Gitter werde ein kurzzeitiger positiver Spannungsimpuls erteilt. Die gleich nach dem Beginn dieses Impulses von der Katode startenden Elektronen haben die kleinste Laufzeit, da während ihrer Flugzeit die Anodenspannung noch nicht merklich abgesenkt ist. Je später ein Elektron startet, desto länger ist seine Flugzeit, denn die Anodenspannung und damit das beschleunigende Feld nehmen mit der Zeit ab. Die zuletzt, d.h. kurz vor dem Ende

des Gitterimpulses abfliegenden Elektronen laufen u.U. so langsam, daß sie nicht mehr imstande sind, die Anode überhaupt noch zu erreichen. Sie werden wieder von der Katode aufgenommen. Damit vermindert sich zunächst der integrale Anodenstrom und demzufolge auch die Steilheit der Röhre. Ferner kommt durch die endliche Laufzeit der Elektronen eine Phasenverschiebung zwischen Gitterspannung und Anodenstrom zustande, wie dies schematisch Bild 322 zeigt.

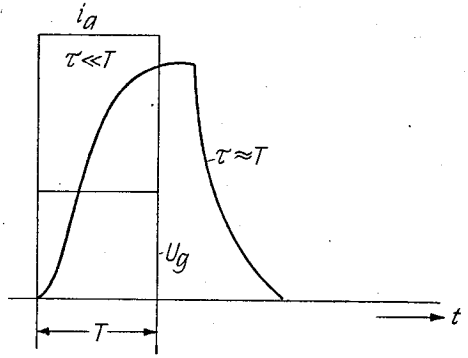

Bild 322
Rechteck-Impuls am Gitter einer Verstärkerröhre für Laufzeiten $\tau = 0$ (Verlauf a) $\tau \approx T$ (Verlauf b)

Laufzeiterscheinungen in Elektronenröhren zwingen einerseits zu konstruktiven Veränderungen (z.B. Verkleinern der Elektrodenabstände [1]) und setzen schließlich der Verwendung üblicher Röhren als Verstärker überhaupt eine Grenze. Anderseits ermöglichen sie die Erzeugung und Verstärkung noch kürzerer Wellen. Wir nennen in diesem Zusammenhang nur die Erzeugung von Bremsfeldschwingungen durch Pendelung der Elektronen um ein positives Gitter und ferner die geschwindigkeitsgesteuerten Laufzeitröhren (Triftröhren), die als Verstärker und Generator im dm- und cm-Wellenbereich Verwendung finden. Eine Besprechung der Möglichkeiten, höchste Frequenzen zu erzeugen und zu verstärken, bleibt den Spezialvorlesungen über Hoch- und Höchstfrequenztechnik vorbehalten.

[69] Die Beschleunigung von Ladungsträgern in rasch veränderlichen Feldern

1. Allgemeine Zusammenhänge zwischen Masse, Energie, Beschleunigungsspannung und Geschwindigkeit: Die Kernphysik benötigt für ihre vielseitigen Experimente geladene Teilchen [2] von außer-

1) Neuere Röhren arbeiten mit Elektrodenabständen in der Größenordnung von 10^{-1} mm und sind anwendbar bis zu Wellenlängen von einigen Dezimetern.

2) Zum Beispiel Protonen, Deuteronen (H^2-Kerne), α-Teilchen (He-Kerne), Elektronen.

ordentlich hoher Energie. Eine Möglichkeit hierzu bietet die Beschleunigung von Ladungsträgern auf höchste Geschwindigkeiten in rasch veränderlichen Feldern unter Ausnutzung von Laufzeiteffekten. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß bei Trägergeschwindigkeiten, die sich der Lichtgeschwindigkeit c nähern, nicht mehr die klassischen Zusammenhänge zwischen Masse und Energie bzw. Geschwindigkeit gelten. So würden beispielsweise Elektronen nach der klassischen Formel (623) durch eine Spannung von U = 10 kV auf eine Geschwindigkeit von $v = 6 \cdot 10^7$ m/sek, also auf 20 % der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. Bei U = 250 kV erreichten nach (623) Elektronen sogar die Lichtgeschwindigkeit selbst. Für noch höhere Beschleunigungsspannungen würde c sogar übertroffen werden, was dem Grundpostulat der Einsteinschen Relativitätstheorie, nach dem die Lichtgeschwindigkeit überhaupt als Grenze aller Massen- oder Energietransportgeschwindigkeiten anzusprechen ist, widersprechen würde. Der Grund für die Abweichung von den klassischen Gesetzmäßigkeiten ist die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit. Es gilt

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (679)$$

wobei m_o die Ruhemasse (für v = 0) und β das Verhältnis v/c bedeutet. Da die bezogene Geschwindigkeit β mit dem Quadrat eingeht, macht sich eine Massenzunahme praktisch erst für größere Geschwindigkeiten bemerkbar. Für die oben gegebenen Zahlenwerte $v = 6 \cdot 10^7$ m/s wird $\beta = 0{,}2$ und somit

$$\frac{m}{m_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}04}} = 1{,}02$$

Wird also ein Materieteilchen auf 20 % der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt, so vergrößert sich seine Masse um ca. 2 %. Erreicht das Teilchen dagegen Lichtgeschwindigkeit, so wächst seine Masse ins Unendliche. Da keine noch so große Kraft diese Masse weiter beschleunigen kann, ist die Lichtgeschwindigkeit theoretische Grenzgeschwindigkeit.

Die Abhängigkeit der Teilchengeschwindigkeit β von der Beschleunigungsspannung U läßt sich über die Äquivalenz von Masse und Energie

$$W = m c^2 \qquad (680)$$

herleiten. Die gesamte kinetische Energie eines Körpers läßt sich nämlich auch deuten als Energieäquivalent seiner Massenzunahme Δm gegenüber seiner Ruhemasse

$$W_{kin} = (m - m_0)c^2 = \Delta m \cdot c^2 \tag{681}$$

Da aber anderseits noch die Energiebeziehung $W_{kin} = qU$ gelten muß, folgt der Zusammenhang

$$qU = (m - m_0)c^2 \tag{682}$$

Bei Berücksichtigung von (679) folgt damit die gesuchte Abhängigkeit der Geschwindigkeit β von der Beschleunigungsspannung U

$$\beta = \sqrt{1 - \left[\frac{1}{1 + \frac{qU}{m_0 c^2}}\right]^2} \tag{683a}$$

Als Grenzwert ergibt sich erwartungsgemäß

$$\lim_{U \to \infty} = 1$$

Anderseits gewinnt man für die Abhängigkeit U von β den Ausdruck

$$U = \frac{m_0 c^2}{q}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right] \tag{683b}$$

Die relativistische Formel (683) ist die in jedem Falle exakt gültige. Die klassischen Beziehungen

$$\beta = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2q\,U}{m}} \quad \text{und} \quad U = \frac{m\,c^2}{2q}\beta^2$$

gehen daraus nur als Näherungen für kleine Geschwindigkeiten ($\beta < 0{,}2 \ldots 0{,}1$) hervor.

In Tafel 9 sind für Elektronen und Protonen diejenigen Beschleunigungsspannungen zusammengestellt, die zur Erreichung von $\beta = 0{,}2$ bzw. 1 erforderlich sind, und zwar sowohl klassisch als auch relativistische berechnet.

Tafel 9

Klassisch und relativistisch berechnete Spannungen für die Beschleunigung von Elektronen und Protonen auf 0,2c und 1,0c

		klassisch		relativistisch	
Geschwindigkeit v =		0,2c	1,0c	0,2c	1,0c
U[V] für	Elektronen	$10 \cdot 10^3$	$250 \cdot 10^3$	$10{,}2 \cdot 10^3$	∞
	Protonen	$18{,}5 \cdot 10^6$	$470 \cdot 10^6$	$18{,}9 \cdot 10^6$	∞

2. Die Verwendung höchstbeschleunigter Ladungsträger: Im wesentlichen verwendet man sehr schnelle Materieteilchen für die

a) Auslösung von Kernreaktionen,
b) Erzeugung harter γ-Strahlung,
c) Imitierung von kosmischer Strahlung.

Zu a) Zur Auslösung und Untersuchung von Kernreaktionen sind im allgemeinen Energien von mehreren 10^6 eV erforderlich, da der Kern weitaus stabiler als die ihn umgebende Elektronenhülle ist.
Zu b) Harte γ-Strahlen oder Röntgenstrahlen gestatten eine zerstörungsfreie Prüfung von Werkstoffen. Sie finden ferner in der Medizin bei Durchleuchtungen und Tiefenbestrahlungen Verwendung, werden heute jedoch schon von den billigeren und besser zu handhabenden künstlichen Isotopen mehr und mehr verdrängt.
Zu c) Die kosmische Strahlung ist sehr energiereich. Um eine annähernd gleiche Wirksamkeit zu erzielen, sind Höchstenergien von einigen 10^9 eV erforderlich.

3. Technische Ausführung der Beschleuniger von Ladungsträgern:
a) Linearbeschleuniger: Die endliche Laufzeit von Ladungsträgern in hochfrequenten Feldern kann man dazu benutzen, diese mit der gleichen Spannung mehrmals hintereinander zu beschleunigen. Bild 323 zeigt eine schematische Anordnung von mehreren hintereinander geschalteten Gittern, denen eine hochfrequente Wechselspannung so zugeordnet ist, daß die

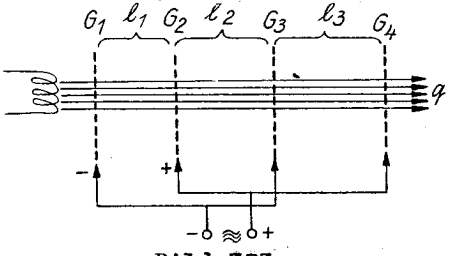

Bild 323
Wirkungsschema eines Linearbeschleunigers

Ladungsträger beim Passieren der Gitter jeweils die gleiche Halbwelle vorfinden. Das Teilchen wird auf diese Weise ständig beschleunigt.

Ist n die laufende Zahl der Beschleunigungsstufe, so ergibt sich der Gitterabstand ℓ_n nach dem Wurzelgesetz $\ell_n \sim \sqrt{n}$. Da die Laufstrecken mit jeder Beschleunigungsstufe größer werden, sind meistens sehr lange Apparaturen erforderlich.

Der genannte Nachteil läßt sich vermeiden, wenn die Teilchenbahn durch ein Magnetfeld zu einem Kreise vom Radius R gemäß (627) gekrümmt wird. Die anschließend besprochenen Zirkularbeschleuniger arbeiten nun in der Weise, daß die Teilchen eine magnetische gebogene Bahn sehr oft durchlaufen. Durch besondere Vorrichtungen werden sie bei jedem Umlauf ein- oder zweimal beschleunigt, wodurch sich der Bahnradius nach (627) ständig vergrößert. Die erste Konstruktion dieser Art ist das Zyklotron.

b) Zyklotron:

α) Aufbau und Wirkungsweise: Die Träger werden mittels eines starken Magnetfeldes im Kreise geführt und durchlaufen so mehrmals die gleiche Beschleunigungsstufe zwischen den beiden, an hochfrequenter Wechselspannung liegenden Elektroden A und B (Bild 324). Diese sind als flache dosenförmige Halbzylinder (Duanten) ausgebildet. Die Umlaufzeit eines Teilchens innerhalb eines senkrecht zur Teilchengeschwindigkeit gerichteten homogenen Magnetfeldes hat im klassischen Bereich mit (627a) den Wert

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB} \tag{684}$$

Sie ist also von der Geschwindigkeit v des Teilchens unabhängig. Man wählt aus diesem Grunde die Umlaufzeit τ so, daß sie gleich der vollen Periodendauer T der hochfrequenten Wechselspannung ist. Wir erhalten dann die „Resonanzbedingung des Zyklotrons"

$$\tau = T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{685}$$

Solange das Teilchen innerhalb der beiden Halbzylinder fliegt, unterliegt es keinem elektrischen Feld und damit keiner Beschleunigung. Nur beim Übergang zwischen den beiden Duanten wird es von einem elektrischen Feld, das von der augenblicklichen Spannungsdifferenz herrührt, beeinflußt. Infolge der Resonanz $T = \tau$ findet

nun ein solcher Durchgang durch die Feldregion stets in derselben Phasenlage statt, wobei wegen des Wechsels der Feldrichtung das Teilchen jedesmal eine Beschleunigung erfährt. Für die Resonanzlage $\tau = T$ ergibt sich mit (684) und (685)

$$\omega = 2\pi f = \frac{q B}{m} \tag{686}$$

Mit einer Induktion $B = 10^3\ G = 0{,}1\ \frac{Vs}{m^2}$ errechnet man beispielsweise für Protonen die Resonanzfrequenz

$$\omega = \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ As \cdot 0{,}1\ Vs/m^2}{1{,}6 \cdot 10^{-27}\ Ws^3/m^2} = 10^7\ s^{-1}$$

Das entspricht also einer Frequenz von $f = 1{,}6$ MHz oder einer Wellenlänge von $\lambda = c\ f \approx 200$ m.

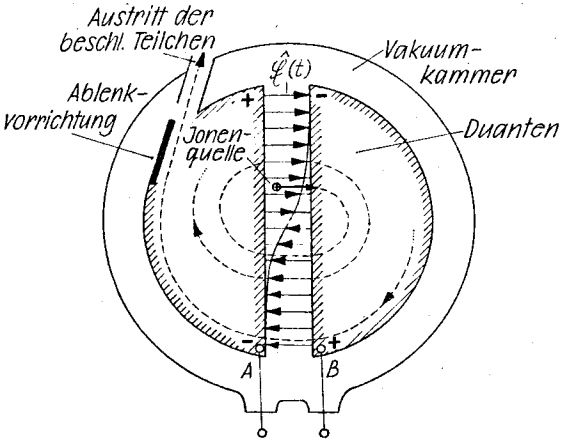

Bild 324
Schema eines Zyklotrons

β) Daten und Eigenschaften ausgeführter Anlagen:
Die Scheitelspannung zwischen den beiden Duanten liegt allgemein in der Größenordnung von $U_s = 10^4$ V bis 10^5 V. Die Anzahl der Umläufe beträgt ca. 100 bis 1000. Praktisch erreichbare Höchstwerte der Induktion B liegen bei etwa 15 000 G. Für Protonen ergeben sich Endenergien bis zu 30 MeV. Für schwerere Teilchen, wie z.B. Deuteronen oder He-Kerne, sind diese Energien entsprechend dem Atomgewicht größer. Der Durchmesser eines in den 30er Jahren in Deutschland hergestellten Zyklotron, mit dem sich He-Kerne auf 17 MeV beschleunigen ließen, betrug $2R = 1{,}52$ m. Die Teilchenstromstärke der damit beschleunigten α-Teilchen erreichte mit 100 mA einen Wert, der einer Strahlungs-

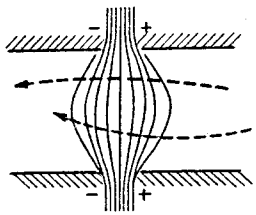

Bild 325
Ausführung der Halbzylinderkanten eines Zyklotrons als zylindrische Sammellinse

intensität von 10 kg Radium entspricht.
Die Streuung der Teilchenbahnen durch Zusammenstoß mit Restgas-Molekeln wird bei den üblichen Geräten durch entsprechende Ausbildung der Halbzylinder weitestgehend kompensiert. Bild 325 zeigt, wie bereits eine ganz normale Ausführung der Halbzylinder-Kanten auf die Teilchenbahnen als Sammellinse wirkt.
γ) Grenzen der Anwendung (Höchstgeschwindigkeiten): Die Unabhängigkeit der Umlaufdauer τ von der Teilchengeschwindigkeit (vgl. 684) gilt nur, solange die Teilchenbewegung den klassischen Gesetzen gehorcht, also für nicht zu große Geschwindigkeiten, d.h., solange die Masse m in (684) mit der Ruhemasse m_o identisch ist. Das Zyklotron eignet sich aus diesem Grund nicht für eine Beschleunigung von Elektronen, die ja bereits für die relativ geringe Spannung von 10 kV das 0,2fache der Lichtgeschwindigkeit erreichen. Die Anwendung des Zyklotrons beschränkt sich deshalb auf die Beschleunigung von schwereren Teilchen (Ionen). Jedoch muß auch in solchen Fällen mit einer oberen Grenzgeschwindigkeit der Teilchen infolge Versagens der klassischen Formel gerechnet werden. Gemäß (684) steigt bei großen Geschwindigkeiten die Umlaufzeit τ an, weil die Masse m mit der Teilchengeschwindigkeit zunimmt. Dadurch fallen die Teilchen außer Tritt, d.h., sie treffen in falschen Phasenlagen am Feldspalt ein. Es läßt sich zeigen, daß unter diesen Umständen eine bestimmte Grenzgeschwindigkeit nicht überschritten werden kann, selbst wenn das Magnetfeld genügend groß wäre. Vielmehr wird ein Zustand erreicht, in dem die Geschwindigkeit kleine Schwingungen um einen konstanten Wert herum ausführt (Bild 326).

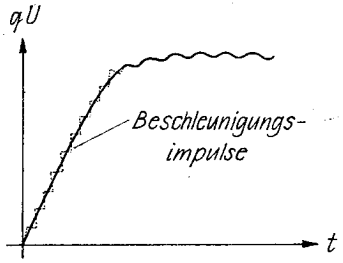

Bild 326
Zeitlicher Verlauf der Teilchenenergie im Zyklotron

Um nun trotzdem eine höhere Teilchenenergie zu erreichen, kann man von den Möglichkeiten der Frequenzanpassung (Frequenzmodulation) oder der Magnetfeldanpassung Gebrauch machen. In dem einen Falle wird $f \sim 1/m$, im anderen $B \sim m$ verändert, so daß die Resonanz $\tau = T$ stets gewährleistet ist.
Da der Kompensationsmechanismus nur

jeweils am Ende der Beschleunigungsperiode eingeschaltet werden darf, ist ein kontinuierlicher Betrieb nicht mehr möglich und damit der Übergang zum sogenannten Impulsbetrieb erforderlich. Ein mit Frequenzanpassung arbeitendes Gerät ist das nachfolgend kurz beschriebene Synchro-Zyklotron.

c) Synchro-Zyklotron: Die Modulation der Generatorfrequenz mit Hilfe eines im Ozillators angebrachten Drehkondensators, der von einem Motor periodisch durchgedreht wird, gestattet eine wesentliche Erhöhung der oberen Geschwindigkeitsgrenze. Bei einer zu rund 10 % modulierten Generatorfrequenz können α-Teilchen (He-Kerne) stoßweise bis auf 400 MeV beschleunigt werden, wenn die Anfangsfrequenz etwa 10 MHz und der Scheitelwert der Beschleunigungsspannung 10 kV beträgt. Die Zahl der möglichen Umläufe in Resonanz liegt etwa bei 10 000.

Nach obigem Schema wurde in Berkeley (Californien) ein Riesenzyklotron mit den folgenden Daten gebaut:

Durchmesser des Magnetfeldes:	4,7 m
Induktion des Magnetfeldes:	15 000 G
Eisenaufwand:	5 000 t

Das Gerät gestattet eine Beschleunigung von Deuteronen (H^2-Teilchen) auf Energien um 200 MeV und von α-Teilchen auf Energien um 400 MeV.

Da sich der Bau von Zyklotrons praktisch noch im Entwicklungsstadium befindet, liefert jeder Neubau weitere Erkenntnisse. Es kommt deshalb oftmals vor, daß schon während des Baues ursprünglich nicht geplante Veränderungen vorgenommen werden. So wurde z.B. auch das Berkeley-Zyklotron zunächst als reines Zyklotron, also ohne Frequenzanpassung geplant, aber schon während seines Baues zum Synchro-Zyklotron abgeändert.

Der Nachteil aller Zyklotron-Konstruktionen ist der große Raumaufwand des Magnetfeldes. Einerseits erfordern Aufbau und Unterhaltung des Feldes sehr große Energien, anderseits läßt sich dieses Feld nur mit großen Schwierigkeiten homogen gestalten. Die nächste Entwicklungsstufe sieht deshalb vor, die Trägerbahn nicht mehr spiralförmig zu gestalten, sondern auf eine einzige Sollbahn (Sollkreis) zu konzentrieren. Dieser Weg kann jedoch nur dann beschritten werden, wenn nicht nur die Frequenz der

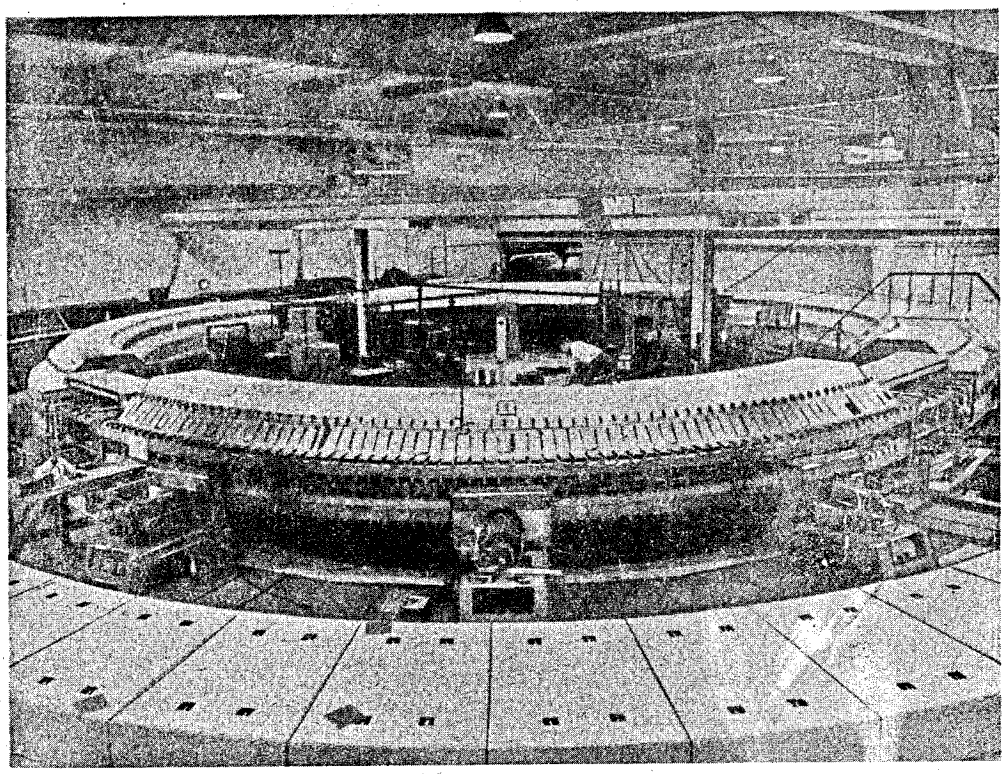

Bild 327
Das Kosmotron in den Brookhaven National Laboratories (entnommen aus Philips' Technische Rundschau, Jahrg. 15, H. 9, 1954). Man sieht die vier großen Elektromagnete, mit einem Gesamtgewicht von 2200 Tonnen, welche die aus vier Stücken bestehende ringförmige Beschleunigungskammer umgeben. Im Hintergrund der in einem horizontalen Druckbehälter untergebrachte Van de Graaff-Hochspannungserzeuger. Im Vordergrund eine Betonmauer, die das Personal vor der Strahlung der Maschine schützt

das Teilchen beschleunigenden Energieimpulse, sondern auch die Induktion geändert wird. Nur dann gilt für den Sollkreisradius

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} = \text{konst.}$$

Eines der größten bisher bekannten, nach diesem Prinzip arbeitenden Geräte wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

d) Kosmotron: Das hier besprochene Synchro-Zyklotron wurde in Brookhaven (USA) gebaut und dient in erster Linie der künstlichen

Erzeugung von kosmischen Strahlen, die ja bekanntlich eine weitaus höhere Energie verlangen, als sie beispielsweise zur Untersuchung oder Auslösung von Kernreaktionen nötig ist. Das Gerät erhielt aus diesem Grunde den Namen Kosmotron. Es gestattet eine Beschleunigung von Protonen auf 3000 MeV, also auf 3 Milliarden eV. Eine fotografische Aufnahme der Maschine kurz vor Beendigung der Montage zeigt Bild 327. Aufbau und Wirkungsweise dieses Mammutapparates sind im wesentlichen wie folgt:

α) Beschleunigungsmechanismus: Abweichend vom üblichen Zyklotron erfolgt die Beschleunigung der Teilchen (Protonen) nicht durch elektrische Felder, sondern durch elektromagnetische Induktion. Die Protonen laufen in einer ringförmigen, evakuierten Beschleunigungskammer vom Querschnitt 75 × 17,5 cm. Die ringförmige Kammer besteht aus vier Quadranten von etwa 10 m Radius, die durch vier kurze gerade Stücke miteinander verbunden sind (schematisch in Bild 328 dargestellt). Magnetfelder, die senkrecht auf der Ebene des Ringes stehen und von vier starken Elektromagneten erzeugt werden, halten die Protonen auf einer Sollbahn, die ungefähr mit der Achse der ringförmigen Kammer zusammenfällt.

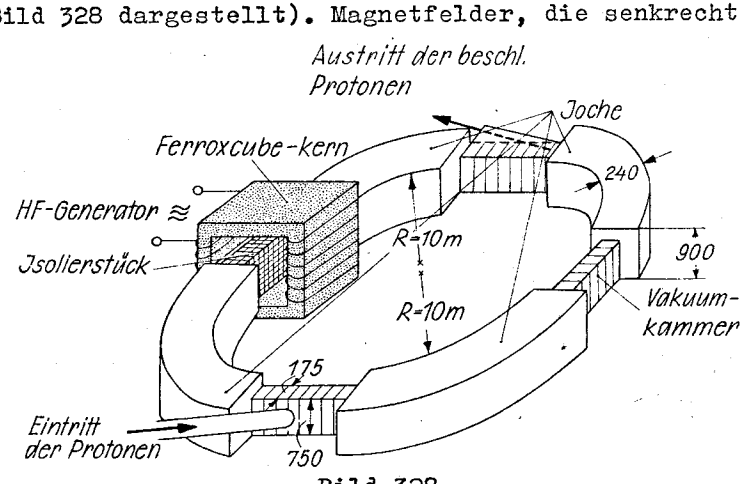

Bild 328
Grobschematischer Aufbau des Kosmotrons

Bild 327 läßt die Joche der Magneten, welche die ringförmige Kammer umgeben, gut erkennen.

Die metallische Vakuumkammer hat einen Gesamtumfang von 70 m. Sie dient als Sekundärwicklung eines Transformators, dessen Kern aus Ferroxube, einem neuartigen magnetischen Sinterwerkstoff (Ferrit), besteht. Dieses Material zeichnet sich durch große Permeabilität und kleine Magnetisierungsverluste aus. Bis zu Frequenzen

von beispielsweise 3 MHz ist $\mu_r \approx 1000$. Eines von den geraden Stücken der Vakuumkammer ist im Transformatorkern durch ein Isolierstück unterbrochen (vgl. Bild 328). Über dieser Stelle fällt die induzierte Spannung ab, so daß hier ein longitudinales elektrisches Wechselfeld entsteht, das den Protonen bei jedem Umlauf einen Beschleunigungsimpuls erteilt.

β) Eintritt der Teilchen und Anfangsenergie: An einem weiteren geraden und feldfreien Stück der Beschleunigungskammer treten die Protonen in die Sollbahn ein (vgl. Bild 328). Diese werden aus einer Wasserstoffionenquelle bezogen und von einem Van de Graaffschen Hochspannungsgenerator zu einer Anfangsenergie von 3,5 MeV beschleunigt. Diese hohe Einschußgeschwindigkeit ermöglicht ein Überspringen der untersten Beschleunigungsstufen und damit eine erhebliche Einsparung an Magnetisierungsaufwand.

γ) Anpassung und Erzeugung des Magnetfeldes: Um die Protonen auf einer kreisförmigen Sollbahn mit dem Radius R_o zu halten, braucht man ein magnetisches Feld der Induktion

$$B = \frac{m\,v}{q\,R_o}$$

Setzt man das der Anfangsenergie von 3,5 MeV entsprechende Moment mv ein, so findet man als Anfangswert der Induktion B = 290 G. Damit die Protonen fortwährend auf derselben Bahn laufen, obwohl ihre Energie und ihr Moment ständig zunehmen, steigert man die magnetische Induktion allmählich bis zu einem Höchstwert von B = 14 000 G. Dieser Wert ermöglicht es, die Protonen noch bei Endenergien um 3100 MeV in der vorgeschriebenen Sollbahn zu halten [1].

Eines der wichtigsten Probleme war die Erzeugung der großen magnetischen Energie, die erforderlich ist, um die Protonen in der Sollbahn zu halten. In einem Feld der Induktion B = 14 000 G, das in einem Raum von 70 m Länge und rd. 90 × 24 cm Querschnitt herrscht, beträgt die magnetische Energie $1{,}2 \cdot 10^7$ Joule [2]. Diese ungeheuere magnetische Energie muß während einer Beschleunigungsstufe aufgebaut und in Vorbereitung auf die nächste Beschleunigungsstufe

1) Trotz dieser riesigen Energie ist zur Erzeugung des Magnetfeldes ein Eisenaufwand von nur noch 2200 t erforderlich. Das weit schwächere Berkeley-Zyklotron benötigte mit 5000 t mehr als das Doppelte.

2) Die magnetische Energie im Luftspalt eines starken Lautsprechers beträgt 0,25 Joule.

verhältnismäßig schnell wieder abgebaut werden. Da es wirtschaftlich kaum tragbar ist, die magnetische Energie in den Pausen zwischen Auf- und Abbau des Feldes in Form von Wärme abzuführen, wird sie als kinetische Energie in einem großen Schwungrad gespeichert und von neuem benutzt. Eine Beschleunigungsstufe erstreckt sich über die verhältnismäßig lange Zeitdauer von 1,0 s. Dies bringt mit sich, daß die Protonen während ihrer Beschleunigung etwa $3 \cdot 10^6$ Umläufe machen. Die Kühlung, mit der die Anlage ausgestattet ist, und die verfügbare Leistung des gesamten Aggregats, das mit dem Schwungrad gekuppelt ist, ermöglichen alle 5 s einen Beschleunigungsimpuls.

δ) Anpassung der Frequenz: Beim Eintritt mit einer Energie von 3,5 MeV beträgt die Protonengeschwindigkeit $2{,}6 \cdot 10^{-7}$ m/s. Da die Bahn entlang der Achse der ringförmigen Kammer etwa 70 m lang ist, brauchen die Protonen im Anfang etwa 2,8 μs für einen Umlauf. Das bedeutet, daß in dem eigentlichen Beschleunigungsabschnitt der Kammer ein elektrisches Wechselfeld mit einer Frequenz von 0,35 MHz erforderlich ist, um den anlaufenden Protonen jedesmal in der richtigen Phase einen Impuls zu erteilen. Bei einer Endenergie von 3000 MeV dagegen ist die nunmehr nach der relativistischen Formel zu berechnende Geschwindigkeit der Protonen etwa $2{,}1 \cdot 10^8$ m/s ($\beta \approx 0{,}7$!), so daß während der Beschleunigung eines Protonenpaketes die Frequenz des elektrischen Wechselfeldes stetig von 0,35 MHz bis zu etwa 4 MHz gesteigert werden muß. Diese Modulation geht automatisch mit dem Anstieg der Induktion vor sich, so daß die Bedingung für die Sollbahn immer eingehalten wird.

ε) Austritt der Teilchen: Haben die Protonen die Endenergie erreicht, so können sie mit Hilfe einer geeigneten Ablenkeinrichtung, die in einem weiteren geraden Stück der Beschleunigungskammer untergebracht (vgl. Bild 328) ist, aus der Sollbahn herausgelenkt und der weiteren Verwendung zugeführt werden.

Kürzlich wurde der Bau einer noch größeren Beschleunigungsapparatur in der Sowjetunion bekannt, die den Namen „Phasotron" trägt.

e) Betatron (Elektronenschleuder):

α) Elektronenbeschleunigung und Sollbahn: Das Betatron dient zur Beschleunigung von Elektronen, für die die Relativistik schon von kleinen Energien an zu beachten ist. Es ergeben sich deshalb grundsätzlich andere Gesichtspunkte bei deren Beschleunigung.

Zunächst werden auch hier wieder die Elektronenbahnen auf einen Sollkreis konzentriert, so daß der Aufwand an Raum und Material verhältnismäßig gering ist. Der Sollkreis wird von einem zeitlich veränderlichen Induktionsfluß $\Phi(t)$ durchsetzt (Bild 329, oben), wodurch ein elektrisches Wirbelfeld entsteht, das mit (110) und Berücksichtigung von (69) durch

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}f = \oint \mathfrak{E} \cdot \mathrm{d}s = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

gegeben ist. Integriert man diesen Ausdruck über eine Kreisbahn vom Radius R_o, so ergibt sich die für die Elektronenbeschleunigung maßgebliche Feldstärke

$$E = -\frac{1}{2\pi R_o}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (687)$$

Neben dem zeitlich sich ändernden Magnetfluß $\Phi(t)$ wirkt nun aber auf die Elektronen ein weiteres Magnetfeld, daß ihre Bahnen zum vorgeschriebenen Sollkreis krümmen und bei zufälligen Störungen wieder in diesen hineintreiben soll. Man bezeichnet dieses Magnetfeld als das Führungsfeld. Es habe den Induktionsfluß Φ_F. Zwischen beiden Feldern läßt sich über die Impulsgröße

$$mv = p \qquad (688)$$

folgender Zusammenhang ableiten: Nach der Relativitätstheorie ist die auf das Elektron ausgeübte Kraft gleich der zeitlichen Impulsänderung, also

$$P = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} \qquad (689)$$

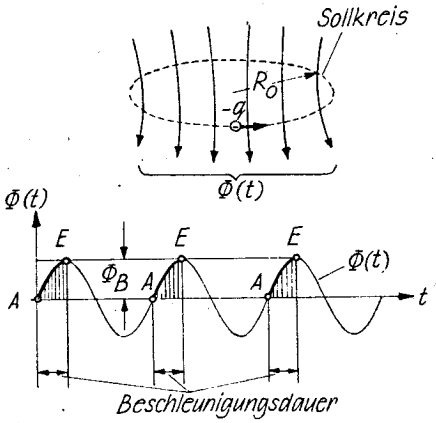

Bild 329
Verlauf des Induktionsflusses (t) und Zeitdauer der Elektronenbeschleunigung im Betatron

(Für konstante Masse m geht dieser Ausdruck in die klassische Newtonsche Formel

$$P = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

über.) Anderseits gilt aber auch Gl. (619) und folglich

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = q\,E \qquad (690)$$

Durch Einsetzen von (687) in (690) wird also

$$\mathrm{d}p = \frac{-q}{2\pi R_o}\mathrm{d}\Phi(t)\,,$$

und die Integration liefert

$$p = \frac{-q}{2\pi R_o}(\Phi_B - \Phi_o) = \frac{-q}{2\pi R_o}\Phi_B \qquad (691)$$

Die untere Integrationsgrenze Φ_o läßt sich gleich Null setzen, da die Beschleunigung stets mit dem Fluß $\Phi(t) = 0$ beginnt (vgl. Bild 329, unten). Mit (691) ist der Impuls der Elektronen und damit auch ihre Energie gegeben.

Das sogenannte magnetische Führungsfeld habe die Induktion

$$B_F = \frac{\Phi_F}{\pi R_o^2} \qquad (692)$$

Es hat die Aufgabe, die Elektronen (von der Ladung -q) auf den Sollkreis zu konzentrieren und muß deshalb der Bedingung (627a)

$$R_o = \frac{mv}{-qB_F} = \frac{p\pi R_o^2}{-q\Phi_F} \qquad (693)$$

genügen. Daraus ergibt sich für den Impuls p der Elektronen ein zweiter Ausdruck

$$p = \frac{-q\,\Phi_F}{\pi R_o} \quad ,$$

und der Vergleich mit (691) liefert

$$\Phi_F = \frac{\Phi_B}{2} \qquad (694)$$

Der Induktionsfluß des magnetischen Führungsfeldes ist also gleich dem halben Induktionsfluß des für die Beschleunigung der Elektronen maßgebenden Magnetflusses. Die Gleichgewichtsbedingung (694) ist leicht zu erfüllen, da die beiden Magnetfelder von ein und demselben Strom erzeugt werden können.

β) Aufbau und Wirkungsweise eines Betatrons: Die Elektronen treten in der Symmetrieebene zwischen zwei radialsymmetrischen Polschuhen eines mit hochfrequenten Wechselstrom gespeisten Elektromagneten in eine ebenfalls ringförmige Vakuumkammer VK ein (Bild 330). Die Ausbuchtung der in Bild 330 eingezeichneten Induktionslinien stabilisiert die Sollbahn sowohl in radialer als auch in feldparalleler Richtung, so

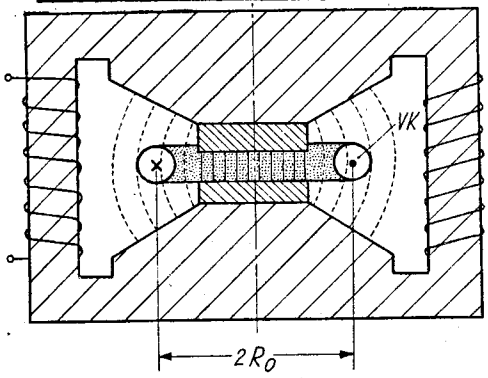

Bild 330
Schema eines Betatrons

daß die Elektronen in zahlreichen Umläufen bis nahezu auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden können. Am Ende einer beliebigen Beschleunigungsperiode (Punkte E in Bild 329 , unten) lassen sich die auf Höchstwerte beschleunigten Elektronen durch Verändern der Gleichgewichtsbedingung (694) aus der Sollbahn herauslenken. Das heißt, der Elektronenstrahl gelangt durch Vergrößern des Bahnradius in eine das Magnetfeld abschirmende U-förmige Metallkammer und kann tangential austreten. Die austretenden hochbeschleunigten Elektronen sind mit den β-Strahlen natürlicher oder künstlicher radioaktiver Stoffe identisch.

Mit einem Betatron von 30 cm Durchmesser lassen sich nach 10^5 Umläufen Elektronen auf rund 15 MeV beschleunigen.

f) Kombination Betatron-Zyklotron (Synchrotron): Zur Erhöhung der Elektronenenergie hat man das Betatronprinzip mit dem Zyklotronprinzip vereinigt. Die Elektronen werden dabei zunächst nach dem reinen Betatronverfahren bis auf etwa Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Anschließend beginnt das Zyklotron zu arbeiten und führt die restliche Beschleunigung durch. Da die Geschwindigkeit der Elektronen sich dann nicht mehr wesentlich ändert, genügt eine relativ geringe Steigerung des Führungsfeldes, um die Elektronen in ihrer Sollbahn zu halten. Das Sollkreisverfahren bringt auch hier eine erhebliche Einsparung an magnetischer Feldenergie und damit an Betriebs- und Montagekosten. Zur Zeit haben solche Synchrotrons bei etwa 1 m Radius Endenergien von etwa 300 MeV erreicht.

4. Grundsätzliches über die Vakuumhaltung bei Trägerbeschleunigern: Die zu beschleunigenden Teilchen haben infolge der hohen Umlaufzahlen sehr lange Strecken zu bewältigen. So ist z.B. die gesamte Bahnlänge, die ein Proton in einem Kosmotron zurücklegt, etwa $2{,}1 \cdot 10^8$m, das sind rd. 55 % der Entfernung von der Erde zum Mond. Wenn man berücksichtigt, daß die mittlere freie Weglänge bei einem technisch gerade noch erreichbarem Vakuum $\lambda_m = 10^2$ m beträgt (vgl. [58]), so erfolgen auf dieser Strecke rd. $2 \cdot 10^6$ Zusammenstöße mit Gasmolekeln. Man sollte meinen, daß dadurch die Teilchenbahnen beträchtlich gestört werden. Das ist aber nicht der Fall, da mit wachsender Teilchengeschwindigkeit die Bahnen steifer und damit weniger störanfällig werden. Die Flugrichtung der Teilchen ändert sich deshalb nur geringfügig. Desgleichen sind die durch

Anregung oder Ionisierung von Gasmolekeln hervorgerufenen Energieverluste klein (10 ... 20 eV). Die kleinen Abweichungen von der Sollbahn können durch die fokussierende Wirkung der Ablenkfelder im Beschleuniger leicht wieder kompensiert werden, so daß man also mit den in der modernen Vakuumtechnik erreichbaren Drücken auskommt.

Übungsaufgaben (3. Kapitel)

1. Von einer Glühkatode wird die Stromdichte 0,5 A/cm^2 verlangt. Wie groß ist die Emissionsökonomie (Emissionsstrom dividiert durch Heizleistung)
   a) für eine Katode aus reinem Wolfram,
   b) für eine Oxydkatode?

Gegebene Daten	A [Acm^{-2} grad^{-2}]	U_a [V]	Emissionsfaktor für die abgestrahlte Leistung
Wolfram	120	4,52	0,31
Oxydkatode	0,0455	1,22	0,19

   Konstante des Stefan-Boltzmann-Gesetzes:
   $\sigma = 5{,}74 \cdot 10^{-12}$ Wcm^{-2} grad^{-4}

2. Einer großen, ebenen Glühkatode aus Wolfram (A = 120A/cm^{2}grad^2 U_a = 4,52 V) steht im Abstande d = 1,5 cm eine große planparallele Anode gegenüber. Die Temperatur der Katode sei T = 2500°K.
   a) Wie groß ist die Sättigungsstromdichte des Glühelektronenstromes?
   b) Welche Anodenspannung ist zur Erreichung der Sättigung erforderlich?
   c) Wie groß ist die Dichte des Anlaufstromes bei einer Anodenspannung von −1 V bzw. −2 V?

3. Eine Photozelle bestehe aus einem unendlich großen Plattenkondensator, Plattenabstand d. Die Katode werde mit einem kurzzeitigen Lichtblitz bestrahlt, dessen Zeitdauer vernachlässigbar klein gegen die Laufzeit der Elektronen sei, die durch ihn aus der Katode ausgelöst werden. Welchen zeitlichen Stromverlauf registriert ein im Stromkreis befindlicher Oszillograph? Wie groß sind Impulsdauer und Zeitintegral des Stromes?

4. Wie groß ist die Brennweite von magnetischen Linsen bei einer Elektronengeschwindigkeit von 60 kV
   a) für einen ebenen Drahtkreis von R = 2 cm Radius, wenn dieser vom Strom 1000 A durchflossen wird,
   b) wenn der achsiale Verlauf der Induktion B durch die Gaußsche Fehlerfunktion mit dem Scheitelwert B_o = 300 G und der Halbwertsbreite 2b = 1,6 cm gegeben ist?
5. Es ist die Gleichung für die Raumladungskennlinie im Zylinderfeld (z.B. eines Zylinderkondensators mit den Radien R_i und R_a) abzuleiten.
6. Zwischen 2 planparallelen Platten sehr großer Ausdehnung fließt ein raumladungsbegrenzter Trägerstrom. Wie verlaufen Potential, Feldstärke und Raumladungsdichte zwischen den Platten, wenn die Trägergeschwindigkeit durch die Feldstärke bestimmt wird und $v = b \cdot E$ gesetzt wird?
   Wie verläuft die Strom-Spannungskennlinie?
7. An den Ablenkplatten (Länge L = 4 cm) einer Braunschen Röhre liegt eine Wechselspannung. Die Röhre wird mit der Anodenspannung U_o = 3000 V betrieben.
   Wie groß ist das Verhältnis der auf dem Leuchtschirm erscheinenden Strichlängen bei den beiden Frequenzen ω_1 und ω_o, von denen ω_1 so groß ist, daß Laufzeiteffekte eine Rolle spielen ($\omega_1 = 2{,}5 \cdot 10^6$ kHz)?
8. In einem Zyklotron sollen α-Teilchen (H^{++}-Kerne) in 120 Umläufen von U_o = 1,5 MeV auf U_e = 25 MeV beschleunigt werden. Das Magnetfeld habe die Induktion B = 4500 G. Zu berechnen sind
   a) Amplitude und Frequenz der Beschleunigungsspannung,
   b) Radius von Ein- und Austritt der α-Teilchen,
   c) radialer Abstand der beiden letzten Teilchenbahnen.
   d) Wieviel wird an Magnetfeldstärke gespart, wenn die Einschußspannung von 1,5 auf 3,0 MeV gesteigert wird?
9. In einem Phasotron von R_o = 29 m Radius sollen Protonen von U_e = 9 MV auf U_a = 10 BeV (= 10^{10}V) in n = $4{,}5 \cdot 10^6$ Umläufen beschleunigt werden. Zu berechnen sind
   a) die Amplitude der Beschleunigungsspannung,
   b) Frequenz und Magnetfeld zur Zeit des Einschusses und des Ausstoßes der Teilchen.

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

3. Kapitel: Stromleitung im Hochvakuum (Fortsetzung) 531

65 Geometrische Elektronenoptik 531
1. Grundsätzliches 531
2. Analogien zwischen Licht- und Elektronenoptik 531
3. Sammelwirkung elektrischer und magnetischer Felder 536
4. Bestimmung der Brennweite 545
5. Linsenfehler 546

66 Elektronenbahnen in senkrecht kombinierten Feldern .. 554
1. Mathematische Darstellung der Bahnkurven 554
2. Diskussion der Bahnkurven 556
3. Technische Anwendungsmöglichkeiten 558

67 Elektronenbewegung in Raumladungsfeldern 559
1. Grundsätzliches 559
2. Das Raumladungsgesetz 560
3. Die Potentialverhältnisse 562
4. Die Raumladung in Verstärkerröhren 563

68 Elektronenbewegung in zeitlich veränderlichen Feldern 567
1. Laufzeiterscheinungen 567
2. Die Messung von rasch veränderlichen Vorgängen mit der Braunschen Röhre 571
3. Laufzeiterscheinungen in Verstärkerröhren (Längssteuerung) 572

69 Die Beschleunigung von Ladungsträgern in rasch veränderlichen Feldern 574
1. Allgemeine Zusammenhänge zwischen Masse, Energie, Beschleunigungsspannung und Geschwindigkeit 574
2. Die Verwendung höchstbeschleunigter Ladungsträger 577
3. Technische Ausführung der Beschleuniger von Ladungsträgern 577
4. Grundsätzliches über die Vakuumhaltung bei Trägerbeschleunigern 588

Übungsaufgaben (3. Kapitel) 589